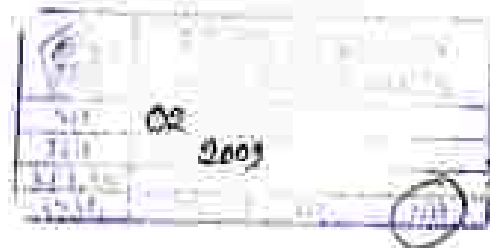




Sebelum mulai mendalami Matematika 3 Dimensi
marilah kita ucapkan

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Matematika 3D Dimensi

Sajian Unik Matematika

dalam Dimensi

Spiritual,

Teoretis,

dan Aplikatif

D a i n o R a h a r j o

Matematika 3 Dimensi

Sajian Unik Matematika dalam Dimensi Spiritual, Teoretis, dan Aplikatif

Diterbitkan oleh TINTA EMAS Publishing

TINTA EMAS Publishing
Jl. Rajamantri Kaler No. 23 Bandung 40264
Telp. 022-7303024

Cetakan Kedua November 2008
Dicetak dan Didistribusikan oleh Percetakan CV. Duta Grafika

ISBN 978-979-049-051-2

© 2008 oleh
Darno Raharjo S.Pd

Dikembangkan oleh Tim Kreatif TINTA EMAS Publishing
Development Editors: Irfadia Arhandhini dan Nuniek Avianti Agus
Creative Directors: Donang B. Wirawan dan Firman Firdaus
Copyeditor: Lustiana Anwar
Layout & Graphic Designers: Indra Nugraha dan Bayu Anggoro
Illustrator: Ende
Cover Designer: Firman Firdaus

Perpustakaan Nasional RI: Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Matematika 3 Dimensi: Sajian Unik Matematika dalam Dimensi Spiritual, Teoretis, dan Aplikatif/
Darno Raharjo/Irfadia Arhandhini, Nuniek Avianti Agus, Lustiana Anwar (ed.)—Cet. 2.—Bandung:
TINTA EMAS Publishing, 2008.
20 cm x 28 cm : viii, 352 hlm.

1. Matematika 3 Dimensi: Sajian Unik Matematika dalam Dimensi Spiritual, Teoretis, dan Aplikatif
- I. Raharjo, Darno
- II. Arhandhini, Irfadia
- III. Agus, Nuniek Avianti
- IV. Anwar, Lustiana

S01

Hak cipta dilindungi oleh Undang-Undang Republik Indonesia No. 19 Tahun 2002 tentang Hak Cipta. Hak penerbitan pada TINTA EMAS Publishing. Tidak diperbolehkan memperbanyak penerbitan buku ini tanpa izin dari TINTA EMAS Publishing.



Alhamdulillah, akhirnya penulis dapat menyusun buku Matematika 3 Dimensi (Diam-Diam Mengasyikkan). Judul tersebut diambil karena matematika bisa ditinjau dari tiga dimensi. Diam-diam mengasyikkan (Dimensi), bermakna bahwa matematika tidak lagi "menakutkan" seperti yang dibayangkan siswa.

Tiga dimensi yang tertuang dalam buku ini meliputi:

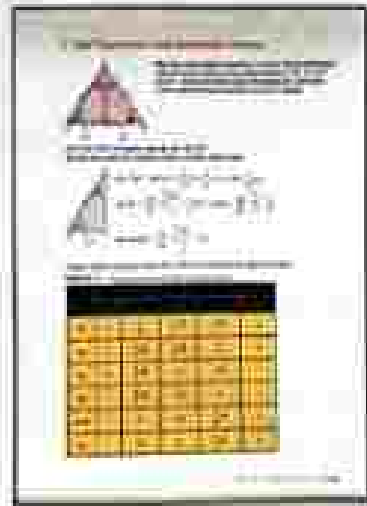
- **Dimensi teoritis**
Membahas teori-teori matematika yang disampaikan secara ringan dan mudah.
- **Dimensi aplikatif**
Menjelaskan bagaimana peran matematika dalam kehidupan nyata.
- **Dimensi spiritual**
Menunjukkan bahwa matematika erat kaitannya dengan aspek religius

Buku ini disusun berdasarkan Sistem Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP). Seperti kita ketahui bahwa sistem KTSP mengharapkan siswa berperan aktif dan mampu memahami konsep, untuk selanjutnya diterapkan dalam kehidupan. Untuk itulah buku ini memuat beberapa hal yang mampu menunjang siswa, agar mencapai tujuan dari kurikulum yang berlaku saat ini.

Harapan penulis, buku ini banyak memberikan manfaat khususnya siswa sekolah menengah atas, dalam rangka memperkaya pemahaman matematika sekaligus meningkatkan keimanan dan ketakwaan. Penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang telah mendukung dan membantu hingga buku ini dapat diselesaikan.

Mei 2008
Penyusun

Darno Raharjo, S.Pd



MUKADIMAH

Pada bagian ini, anda akan mempelajari
cuba-coba matematika untuk belajar dan menguji
kemampuan. Matematika berasal dari bahasa Yunani yang
artinya dengan berpikir logis.

AMAZING PERSON

Menemukan ilmu matematika yang
memadai untuk yang lebih banyak
memberikan kontribusi pada
perkembangan matematika.

IT'S AMAZING

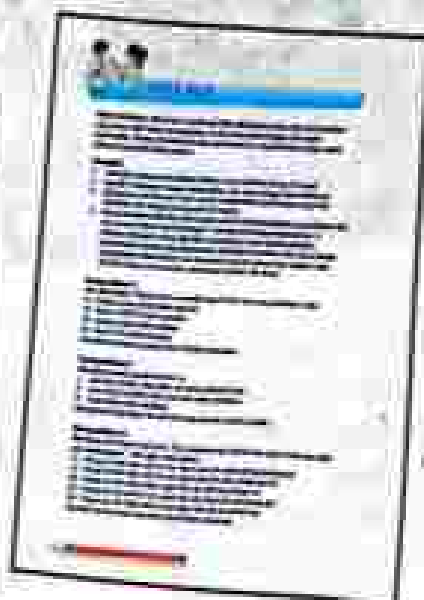
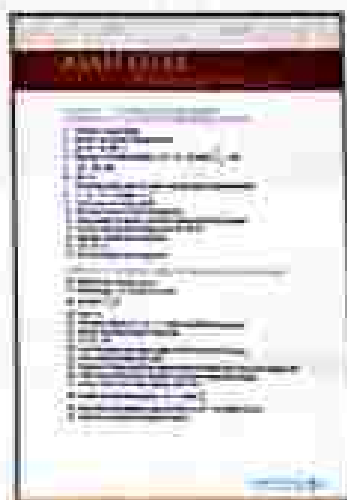
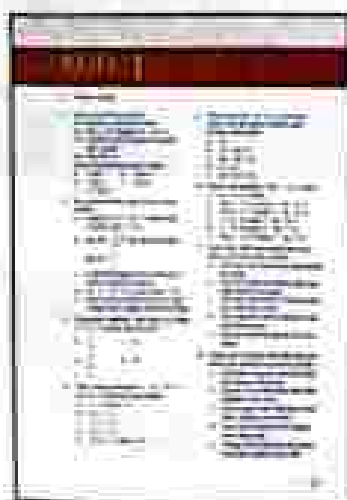
Pada bagian ini, anda akan mempelajari
tentang matematika yang lebih banyak
memberikan kontribusi pada
perkembangan matematika.

LET'S DO IT

Pada bagian ini, anda akan mempelajari
tentang matematika yang lebih banyak
memberikan kontribusi pada
perkembangan matematika.

MATH AROUND US

Pada bagian ini, anda akan mempelajari
tentang matematika yang lebih banyak
memberikan kontribusi pada
perkembangan matematika.



NOTES

Notes adalah catatan yang dibuat
untuk mencatat hal-hal yang penting
dan berguna untuk diingat.

KUIS

Kuis adalah pertanyaan-pertanyaan
yang diberikan untuk menguji
kemampuan dan pengetahuan.

TAKE A BREAK

Take a break adalah istirahat yang
dibutuhkan untuk mengembalikan
energi dan konsentrasi.

ASAH OTAK

Asah otak adalah latihan-latihan
yang bertujuan untuk melatih
kemampuan berpikir kritis.

INFO

MATEMATIKA

Informasi yang akan
dibagikan berkaitan dengan
materi matematika.

LET'S ACT

Let's act adalah kegiatan yang
bertujuan untuk melatih
kemampuan komunikasi.

MATEMATIKA 3 DIMENSI BERISI

Pengantar Penulis v

Apa Isi Buku Ini? vi

Matematika 3 Dimensi Berisi viii

1. Bukan Bilangan Biasa 3

2. All About "Kuadrat" 63

3. Saatnya Sistem Persamaan 119

4. Pilih Kurang atau Lebih? 167

5. Bermain dengan Logika Matematika 193

6. Menelusuri Belantara Trigonometri 231

7. Bangun Ruang di Sekitar Kita 279

Kuis 131

Referensi 143

Mukadimah

Dalam ajaran agama Islam, tidak dikenal istilah kesia-siaan dan tidak berguna. Apalagi jika dikaitkan dengan amal perbuatan. Hal ini karena segala hal yang diperbuat seorang manusia, niscaya akan mendapatkan balasan (al-ajr) yang laik dan seimbang. Demikian juga jika berbuat kejahatan. Laik dan seimbang di sini bukan berarti bahwa jika seseorang berbuat satu kebajikan maka ia akan diberi balasan yang sama pula, yaitu satu pahala kebajikan. Namun, yang dimaksud dengan balasan yang seimbang adalah ia akan mendapatkan pahala yang sebagaimana mestinya, sesuai dengan takaran yang disampaikan rumusannya oleh Sang Pencipta.

Tentunya, balasan pahala yang akan diperoleh adalah yang berkaitan dengan amal sholeh yang berada dalam bingkai ibadah semata. Oleh karena itu, kita harus senantiasa melakukan amal kebajikan karena segala amal kebajikan yang dilakukan karena motivasi dari keinginan untuk memperoleh keridhaan dari Allah Swt. adalah ibadah (*Kullu 'amal shalih li ibthiga'i mardhatillah fa huwa al-'ibadah*). Jadi, segala perbuatan yang terkategori ibadah tentu akan mendapatkan pahala.

Dari uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa seseorang akan memperoleh pahala yang diharapkannya jika ia mengerjakan suatu aktivitas, tidak harus selalu berlabel agama, yang ditujukan dalam kerangka melayani dan mengabdikan kepada Sang Pencipta. Inilah modal paling utama dari makna sebuah ibadah. Dengan demikian, lahirlah dua dimensi dalam pengertian ibadah, yaitu ibadah *mahdhah* dan *ghair mahdhah*.

Hal ini seperti yang disampaikan oleh Allah Swt. dalam surat Al-Zalzalah ayat 7-8 berikut ini, "Barangsiapa yang berbuat kebajikan walaupun hanya sebiji zarah, niscaya ia akan mendapatkan pahalanya. Dan barangsiapa yang berbuat kejahatan walaupun sekecil atom, niscaya ia akan mendapatkan balasannya [*fa man ya'mal mitsqala zarrah khayr yarah, wa man ya'mal mitsqal zarrah syarra yarah*]."

Ayat di atas menyatakan bahwa setiap perbuatan kebajikan atau kejahatan yang kita lakukan, akan selalu mendapat ganjarannya. Oleh karena kemurahan dan kasih sayang Allah, seseorang yang berbuat kebajikan akan mendapatkan balasan yang berlipat-lipat, yaitu sepuluh kali lipat, 700 kali lipat, bahkan ada beberapa kebajikan yang akan mendapatkan balasan yang berlipat-lipat yang tak terhingga jumlahnya.

Untuk kebajikan yang mendapatkan balasan sepuluh kali lipat, dinyatakan dalam sebuah hadits Rasulullah sebagai berikut. "Barangsiapa yang membaca shalawat kepadaku satu kali, niscaya Allah akan membalaskan shalawat kepadanya sebanyak sepuluh kali [*Man shalla 'alayya shalatan wahidatan, shalla Allah 'alayhi 'asyran*]."

Dalam keterangan lain, Allah Swt. menyatakan di dalam surat Al-Baqarah ayat 261 sebagai berikut. "Perumpamaan orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah, baik sebiji tanaman yang tumbuh dengan tujuh dahan, dan masing-masing dahan mengeluarkan seratus biji dan Allah Swt. akan melipatgandakan pahala kepada siapa saja yang dikehendakinya. Allah yang Maha luas lagi Maha mengetahui. [*Matsal al-lazina yunfiquna amwalahum fi sabil Allah ka matsal habbatin anbatat sab'a sanabila fi kulli sunbutah mi'atu habbah. Wa allah yudha'if li man yasya. Wa Allah wasi'un 'Alim*].

Dari ayat tersebut, tampak begitu sangat menakutkan perumpamaan dan analogi yang dibuat oleh Allah Swt. dalam memberikan gambaran tentang pahala yang akan diberikan kepada orang-orang yang berinfak di jalan Allah. Orang-orang yang berinfak dengan hartanya memiliki arti yang sangat luas. Berinfak tidak hanya berupa materi harta benda dan kekayaan, namun juga pikiran, tenaga, bahkan termasuk juga kebahagiaan yang diberikan seorang muslim kepada saudaranya.

Inilah hitungan-hitungan pasti yang dijanjikan oleh Allah Swt. dan Rasulullah SAW terkait dengan pahala yang akan diberikan bagi orang yang melakukan kebajikan. Bahkan ada beberapa keterangan lain yang menyebutkan tentang amal-amal kebajikan yang pahala dan balasannya hanya milik Allah. Artinya, melebihi kategori balasan-balasan yang berlipat seperti yang terdapat pada hadits qudsi yang disampaikan oleh Rasulullah berikut ini. "Setiap amal kebajikan anak manusia, pahalanya akan kembali kepada dirinya, kecuali puasa. Sebab puasa itu adalah milik-Ku, dan Akulah yang akan menentukan balasannya [Kullu 'amal ibn Adam lahu illa ash-shaum. Fa innahu li wa ana ajdzi bihi]."
Dalam kesempatan lain, Rasulullah pun bersabda, "Tiada balasan bagi orang yang melaksanakan ibadah haji dengan mabrur melainkan masuk surga [Al-haji al-Mabrur laya lahu jaza' illa al-jannah]."
Dua hadits tersebut menunjukkan bahwa pahala bagi ibadah puasa yang sempurna dan ibadah haji yang mabrur tidak dibalas oleh Allah dengan kelipatannya, melainkan dibalas dengan sebuah nilai yang jauh melebihi kadar-kadar kelipatan tersebut.

Wallah a'lam bi ash-Shawwab





Sumber: www.nasa.gov

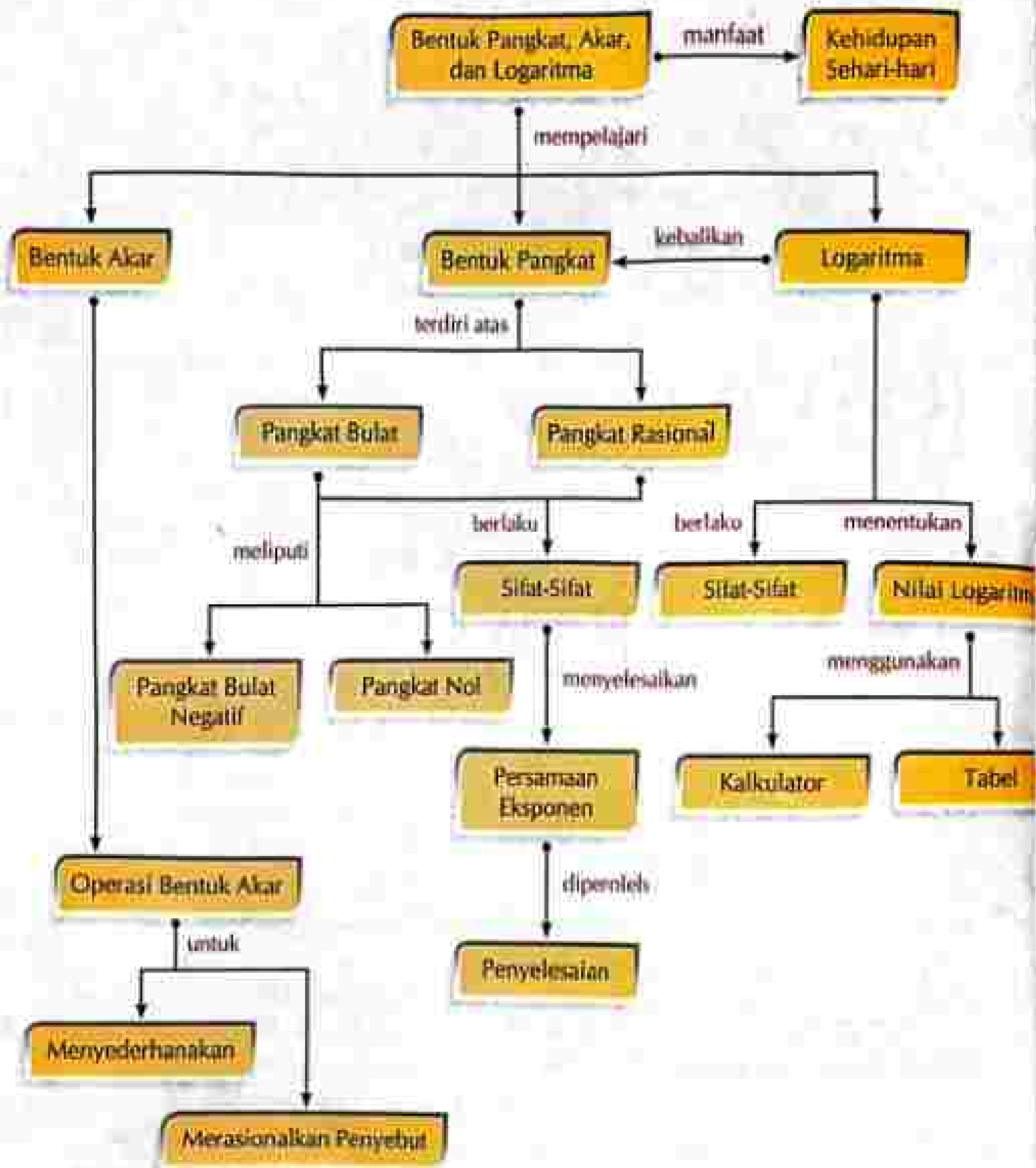
BUKAN BILANGAN BIASA

Manfaat:

Pada bagian ini, kamu dapat menyelesaikan persoalan yang berhubungan dengan bentuk akar, pangkat, dan logaritma. Selain itu, kemampuanmu menganalisa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari akan semakin terasah.

Kata kunci: Akar, pangkat, dan logaritma

Pioneer 10 adalah satu dari beberapa pesawat luar angkasa yang berfungsi untuk meneliti atmosfer planet lain. Pada gambar di atas, tampak Pioneer 10 berada dekat dengan Planet Jupiter. Pada bulan April 1983, pesawat luar angkasa Pioneer 10 berjarak $4,48 \times 10^8$ km dari Bumi. Pesawat tersebut mengirimkan sinyal dalam gelombang radio dengan kecepatan $3,00 \times 10^8$ km/s. Berapa lama sinyal tersebut dapat mencapai permukaan Bumi?



A. Bentuk Pangkat

1. Pangkat Bulat Positif

Kamu tentu telah mengetahui bagaimana menentukan faktor dari suatu bilangan dengan menggunakan diagram pohon faktor. Perhatikan pemfaktoran bilangan 128 berikut.



Dari pohon faktor di samping, diperoleh bahwa 4 dapat dinyatakan sebagai perkalian salah satu faktornya, yaitu 2 sebanyak 2 kali.
8 dapat dinyatakan sebagai perkalian salah satu faktornya, yaitu 2 sebanyak 3 kali.
Demikian seterusnya sesuai dengan Tabel 1.1 berikut.

Tabel 1.1

Faktor-Faktor	Hasil Kali Faktor-Faktor	Keterangan
2×2	4	Diperoleh dari perkalian salah satu faktornya, yaitu 2 sebanyak 2 kali.
$2 \times 2 \times 2$	8	Diperoleh dari perkalian salah satu faktornya, yaitu 2 sebanyak 3 kali.
$2 \times 2 \times 2 \times 2$	16	Diperoleh dari perkalian salah satu faktornya, yaitu 2 sebanyak 4 kali.
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	32	Diperoleh dari perkalian salah satu faktornya, yaitu 2 sebanyak 5 kali.
dan seterusnya.		

Dari pemfaktoran di atas, akan timbul pertanyaan, seberapa panjang penulisan menggunakan 2 sebagai faktor jika bilangan tersebut jutaan atau lebih besar? Untuk penulisan dengan bilangan yang sangat besar, digunakan notasi perpangkatan. Cara ini merupakan cara termudah untuk menjawab permasalahan di atas.

Notas

Notasi perpangkatan digunakan untuk memuliskan perkalian berulang.

Dengan notasi perpangkatan, perkalian faktor pada Tabel 1.1 dapat ditulis sebagai berikut.

Tabel 1.2

Faktor-Faktor	Hasil Kali Faktor-Faktor	Keterangan
2×2	4	2^2 (dibaca dua pangkat dua)
$2 \times 2 \times 2$	8	2^3 (dibaca dua pangkat tiga)
$2 \times 2 \times 2 \times 2$	16	2^4 (dibaca dua pangkat empat)
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	32	2^5 (dibaca dua pangkat lima)
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	64	2^6 (dibaca dua pangkat enam)
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	128	2^7 (dibaca dua pangkat tujuh)

Dari uraian di atas, diperoleh definisi bilangan berpangkat bulat positif, yaitu sebagai berikut.

Jika a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, berlaku

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a \times a \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Pada bentuk a^n , a dinamakan bilangan pokok atau basis dan n dinamakan pangkat atau eksponen.

Notes

a^n dibaca "a pangkat n".

LET'S DO IT



Gunakan kalkulatormu untuk melihat pola yang tampak pada saat kamu mengkuadratkan bilangan-bilangan yang hanya beranggotakan 1 atau 3.

Misalnya:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$11^2 = 11 \times 11 = 121$$

$$111^2 = 111 \times 111 = 12.321$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$33^2 = 33 \times 33 = 1.089$$

$$333^2 = 333 \times 333 = 110.889$$

Teruskan perhitungan itu dan tentukan pola apakah yang terbentuk?



Notes

Sifat-sifat operasi hitung bilangan berpangkat bulat positif adalah sebagai berikut.

Untuk $a, b \in \mathbb{R}$, p, q , dan n merupakan bilangan bulat positif berlaku

1. $a^p \times a^q = a^{p+q}$

Misalnya,

- $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$

- $(4k^2r^3) \times \left(\frac{1}{2^3}k^{-3}r^{-3}\right) = 2^2k^2r^3 \times 2^{-3}k^{-3}r^{-3} = 2^{2+(-3)}k^{2+(-3)}r^{3+(-3)} = k^2$

2. $a^p : a^q = a^{p-q}$, $a \neq 0$

Misalnya,

- $5^2 : 5^3 = \frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1}$

- $\frac{2^{4-1} - 2^1}{2^4 - 2^{1-1}} = \frac{2^3 \times 2^1 - 2^1}{2^4 - (2^1 \times 2^{-1})} = \frac{2^4(2^2 - 1)}{2^1(1 - 2^{-1})} = \frac{4-1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

3. $(a^p)^q = a^{p \times q}$

$(a \times b)^p = a^p \times b^p$

$(a^p \times b^q)^r = a^{p \times r} \times b^{q \times r}$

Misalnya,

- $(7^{-2})^{-4} = 7^{(-2) \times (-4)} = 7^8$

- $(4a^2 \cdot b^3)^2 = 4^2 a^{2 \times 2} \cdot b^{3 \times 2} = 64 a^4 \cdot b^6$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ dan $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^r = \frac{a^{p \times r}}{b^{q \times r}}$, $b \neq 0$

Misalnya,

- $\left(\frac{6^3}{8^2}\right)^5 = \left[\frac{(2 \times 3)^3}{(2^3)^2}\right]^5 = \left(\frac{2^3 \times 3^3}{2^6}\right)^5 = \left(\frac{3^3}{2^3}\right)^5 = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

- $\left(\frac{p^3 q^2 r}{p^{-1} q^3 r^{-3}}\right)^2 = \left(\frac{p^{3+1} r^{1+3}}{q^{3-2}}\right)^2 = \left(\frac{p^4 r^4}{q^1}\right)^2 = \left[\left(\frac{pr}{q}\right)^4\right]^2 = \left(\frac{pr}{q}\right)^8$



AMAZING PERSON

AL-KARAJI (953 – 1029)

Matematikawan dan Ahli Teknik

Al-Karaji memiliki nama lengkap Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji. Beliau dilahirkan di Baghdad, Irak. Dalam salah satu karyanya, Al-Fakhri, untuk pertama kalinya beliau

mendefinisikan bentuk monomial $x, x^2, x^3, \dots$ dan $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$ serta membuat aturan hasil

perkalian di antaranya. Salah satu rumus yang sampai saat ini masih digunakan adalah

$x^n x^m = x^{n+m}$ untuk setiap n dan m anggota bilangan real.

Sumber: www.fosterjones.com/works/al-karaji

Notes

Selain menggunakan pangkat, penyederhanaan penulisan bilangan dapat juga dituliskan menggunakan notasi ilmiah. Bentuk umum notasi ilmiah adalah sebagai berikut.

$$a \times 10^n$$

dengan a anggota bilangan real antara 1 sampai dengan 10 dan n bilangan bulat.

Misalnya, kamu diminta untuk menyederhanakan hasil perkalian

$(5 \times 10^3)(9 \times 10^4)$ dalam notasi ilmiah.

$$(5 \times 10^3)(9 \times 10^4) = (5 \cdot 9) \times (10^3 \cdot 10^4)$$

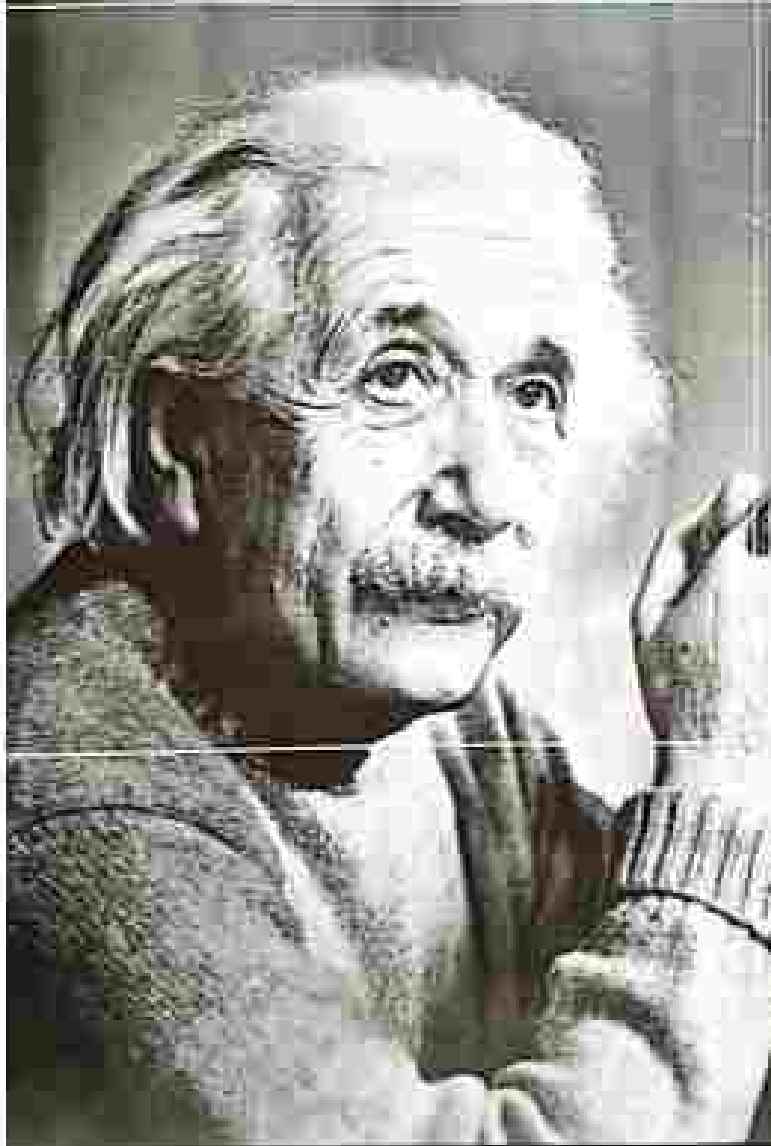
$$= 45 \times (10^3 \cdot 10^4)$$

$$= 45 \times 10^{3+4}$$

$$= 45 \times 10^7$$

$$= 4,5 \times 10^8 \leftarrow \text{notasi ilmiah}$$

INFO MATEMATIKA



Rumus Einstein yang sangat terkenal adalah $E = mc^2$. Rumus tersebut menunjukkan hubungan antara besarnya energi yang dihasilkan berbanding lurus dengan massa dan kecepatan cahaya.

Einstein menyatakan dalam teori relativitas bahwa $E = mc^2$.

Nilai E pada saat $m = 1$ kilogram dan $c = 3 \times 10^8$ m/s adalah

$$E = mc^2$$

$$E = (1) \times (3 \times 10^8)^2$$

$$E = (3 \times 10^8) \times (3 \times 10^8)$$

$$E = (3 \cdot 3) \times (10^8 \cdot 10^8)$$

$$E = 9 \times 10^{16} = 9 \times 10^8$$

$$\text{Jadi, } E = 9 \times 10^8 \text{ kg m/s}^2.$$



MATH AROUND US

Cina dengan jumlah penduduk $1,27 \times 10^9$ jiwa, merupakan negara yang mempunyai jumlah penduduk terbesar di dunia. Adapun jumlah penduduk DKI Jakarta sesuai hasil perhitungan yang dilakukan pemerintah DKI Jakarta tahun 2007 adalah $7,52 \times 10^6$ jiwa. Perbandingan jumlah penduduk Cina dengan jumlah penduduk DKI Jakarta pada tahun 2007 adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Jumlah penduduk Cina}}{\text{Jumlah penduduk DKI Jakarta}} &= \frac{1,27 \times 10^9}{7,52 \times 10^6} \\ &= 0,162 \times 10^3 \\ &= 1,62 \times 10^2 \\ &= 162 : 1 \end{aligned}$$

Jadi, perbandingan jumlah penduduk Cina dengan jumlah penduduk DKI Jakarta pada tahun 2007 adalah sekitar 162 : 1.

Sumber: BPS Jakarta 2007

Kelajuan orbit bulan dinyatakan dengan $v = \frac{2\pi r}{T}$, di mana r menyatakan radius rata-rata

dan T menyatakan waktu (dalam detik) yang diperlukan dalam satu putaran.

Kelajuan orbit bulan jika bulan mengelilingi Bumi dengan radius rata-rata $3,84 \times 10^8$ m dan memerlukan waktu $2,36 \times 10^6$ detik untuk menempuh satu putaran ($\pi = 3,14$) adalah

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ &= \frac{2(3,14)(3,84 \times 10^8)}{2,36 \times 10^6} \\ &= \frac{6,28(3,84 \times 10^8)}{2,36 \times 10^6} \\ &= \frac{24,1152 \times 10^8}{2,36 \times 10^6} && \text{(kalikan 6,28 dengan 3,84)} \\ &= 10,218 \times 10^2 && \text{(bagi 24,1152 dengan 2,36 dan pada} \\ &= 1,02 \times 10^3 \text{ m/s} && \text{bilangan berpangkat gunakan sifat} \\ & && \text{pembagian pada bilangan berpangkat)} \\ & && \text{(nyatakan dengan notasi ilmiah)} \end{aligned}$$

Sumber: NASA 2007



MATH AROUND US



Sumber: www.shutterstock.com

Pupil dari mata manusia berbentuk bundar (lingkaran). Pada saat cahaya redup, jari-jarinya menjadi 6×10^{-3} m. Dengan menggunakan rumus luas lingkaran $L = \pi r^2$, luas pupil pada saat cahaya redup ($\pi = 3,14$) adalah

$$\begin{aligned} L &= \pi r^2 \\ &= 3,14 \times (6 \times 10^{-3})^2 && \text{(substitusikan } 6 \times 10^{-3} \text{ pada } r) \\ &= 3,14 \times 6^2 \times 10^{-6} && \text{(sifat perpangkatan bilangan berpangkat)} \\ &= 113,04 \times 10^{-6} && \text{(kalikan 3,14 dengan 36)} \\ &= 1,130 \times 10^{-4} && \text{(nyatakan dengan notasi ilmiah)} \end{aligned}$$

Jadi, luas pupil pada saat cahaya redup adalah $1,130 \times 10^{-4}$ m.

Bumi dianggap berbentuk bola padat dengan radius rata-rata $6,37 \times 10^6$ m.

Massa bumi dinyatakan dengan $M = \frac{r^2 g}{G}$ dengan r menyatakan jari-jari

bumi, g adalah percepatan gravitasi di permukaan bumi, dan G adalah

tetapan umum gravitasi. Massa bumi jika $g = 9,8$ dan

$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ adalah

$$\begin{aligned} M &= \frac{r^2 g}{G} \\ &= \frac{(6,37 \times 10^6)^2 (9,8)}{6,67 \times 10^{-11}} \\ &= \frac{(6,37^2 \times 10^{12})(9,8)}{6,67 \times 10^{-11}} \\ &= \frac{(6,37^2 \cdot 9,8) \times 10^{23}}{6,67 \times 10^{-11}} \\ &= \frac{397,65362 \times 10^{23}}{6,67 \times 10^{-11}} && \text{(kalikan } 6,37^2 \text{ dengan } 9,8) \\ &= 59,618 \times 10^{23} && \text{(bagi 397,65362 dengan 6,67 sedangkan pada} \\ & && \text{bilangan berpangkat gunakan sifat pembagian} \\ & && \text{pada bilangan berpangkat)} \\ &= 5,96 \times 10^{24} \text{ kg} && \text{(nyatakan dengan notasi ilmiah)} \end{aligned}$$

Jadi, massa bumi adalah sekitar $5,96 \times 10^{24}$ kg.



2. Pangkat Bulat Negatif dan Nol

Untuk memahami pengertian pangkat bulat negatif, perhatikan kembali sifat pembagian bilangan berpangkat bulat positif, yaitu

Jika $a \in \mathbb{R}$, p dan q merupakan bilangan bulat positif maka berlaku

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Jika $p < q$ maka a^{p-q} merupakan bilangan dengan pangkat bilangan bulat negatif. Pangkat negatif suatu bilangan dapat dinyatakan dalam pangkat positif begitu juga sebaliknya. Untuk mengubah pangkat negatif menjadi positif dan sebaliknya, perhatikan pembagian bilangan berpangkat berikut.

$$a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}.$$

Jika bentuk pembagian di atas dituliskan dalam bentuk faktornya, hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^4}.$$

$$\text{Jadi, } a^{-4} = \frac{1}{a^4}.$$

Sekarang, bagaimana jika pada bentuk a^{p-q} , nilai $p = q$? Dengan langkah yang sama maka a^{p-q} merupakan bilangan dengan pangkat nol. Untuk lebih jelasnya, perhatikan uraian berikut.

$$a^7 : a^7 = a^{7-7} = a^0.$$

Jika bentuk di atas dituliskan dalam bentuk faktornya, hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\frac{a^7}{a^7} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a} = 1.$$

$$\text{Jadi, } a^0 = 1.$$

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif dan $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ maka berlaku

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dan } a^0 = 1$$

LET'S DO IT

Sifat-sifat operasi hitung yang berlaku pada bilangan berpangkat bulat positif berlaku juga pada bilangan berpangkat bulat negatif dan nol.

Selidikilah dengan kelompok belajarmu, benarkah pernyataan tersebut?



Agar kamu lebih memahami pangkat bulat negatif dan nol, perhatikan contoh berikut.

a. $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

c. $(-4)^0 = 1$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$

d. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = 1$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah menuliskan perpangkatan berikut dalam bentuk pangkat positif?

a. $\frac{x^{-3} - y^{-2}}{y^{-1} + x^{-1}}$

b. $\frac{x^{-2} + x^{-4} + x^2}{x^{-4} + x^{-2} + x^{-1}}$

Jawab:

a. $\frac{x^{-3} - y^{-2}}{y^{-1} + x^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}$

(nyatakan setiap sukunya dalam pangkat positif)

$$= \frac{\frac{y^2 - x^3}{x^3 y^2}}{\frac{x + y}{xy}}$$

(samakan penyebut di setiap pembilang dan penyebutnya)

$$= \frac{y^2 - x^3}{(xy)^2} \cdot \frac{xy}{x + y}$$

kalikan pembilang dengan kebalikan penyebutnya $\frac{x+y}{xy}$

$$= \frac{y^2 - x^3}{xy} \cdot \frac{1}{x + y}$$

$$= \frac{(y - x)(y + x)}{xy(x + y)}$$

(faktorkan pembilang)

$$= \frac{y - x}{xy}$$

(sederhanakan)

LET'S DO IT

Dengan langkah yang sama, kerjakan pertanyaan b di atas. Bandingkan hasilnya dengan hasil yang diperoleh teman sebangkumu.



Notes

Perpangkatan dengan Basis Nol

Untuk dapat memahami sifat perpangkatan dengan basis nol (0), perhatikanlah perpangkatan berikut:

- $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$
- $0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$

Secara umum, perpangkatan dengan basis nol mempunyai sifat

$$0^n = 0$$

dengan n merupakan bilangan bulat positif.



AMAZING PERSON

LEONARDO DA PISA (1175 - 1230)

Matematikawan dari Italia

Leonardo da Pisa atau Leonardo Pisano, yang dikenal juga sebagai **Fibonacci**, adalah seorang matematikawan Italia yang dikenal sebagai penemu bilangan Fibonacci dan perannya dalam mengenalkan sistem penulisan dan perhitungan bilangan Arab ke dunia Eropa (algorisma).

Ayah Leonardo, Guillelmo (William) mempunyai nama alias Bonacci ('bersifat baik' atau 'sederhana'). Setelah meninggal, Leonardo sering disebut sebagai Fibonacci (dari kata filius Bonacci, anak dari Bonacci). William memimpin sebuah pos perdagangan (beberapa catatan menyebutkan ia adalah perwakilan dagang untuk Pisa) di Bugia, Afrika Utara (sekarang Bejaia, Aljazair), dan sebagai anak muda, Leonardo berkelana ke sana untuk menolong ayahnya. Di sanalah Fibonacci belajar tentang sistem bilangan Arab.

Melihat sistem bilangan Arab lebih sederhana dan efisien dibandingkan bilangan Romawi, Fibonacci kemudian berkelana ke penjuru daerah Mediterania untuk belajar kepada matematikawan Arab yang terkenal pada masa itu, dan baru pulang kembali sekitar tahun 1200-an. Pada tahun 1202, di usia 27 tahun, ia menuliskan apa yang telah dipelajari dalam buku *Liber Abaci*, atau *Buku Perhitungan*. Buku ini menunjukkan kepraktisan sistem bilangan Arab dengan cara menerapkannya ke dalam pembukuan dagang, konversi berbagai ukuran dan berat, perhitungan bunga, pertukaran uang, dan berbagai aplikasi lainnya. Buku ini disambut baik oleh kaum terpelajar Eropa, dan menghasilkan dampak yang penting kepada pemikiran Eropa, meski penggunaannya baru menyebarluas setelah ditemukannya percetakan sekitar tiga abad berikutnya.

Sumber: wikipedia.org

Sumber: K2.gayle.com



- Berapakah nilai x , y , dan z pada bentuk-bentuk berikut?
 - $240 = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$
 - $5.400 = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$
 - $1.458 = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$
 - $675 = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$
- Dapatkah kamu menuliskan bentuk $\frac{3p^{-4} - q^{-2}}{p^{-2} + 2q^{-1}}$ tanpa pangkat negatif?
- Berapakah nilai dari $\left(\frac{16}{15}\right)^7 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3 : \left(\frac{24}{25}\right)^3$?
- Bagaimanakah menuliskan bentuk $\left(\frac{10^4 \times 10^3}{2^7 \times 5^3}\right) \left(\frac{640.000}{2^3}\right)^2$ dengan notasi ilmiah?
- Seperti apa bentuk sederhana dari setiap bentuk?
 - $\frac{5^{m+2} - 5^m}{5^m - 5^{m-1}}$
 - $\frac{3 \cdot 2^{m+2} - 2^{m+4}}{2^{m+1}}$
- Pada tahun 1983, pesawat ruang angkasa Pioneer 10 berada $4,58 \times 10^8$ km dari Bumi. Pesawat tersebut mengirim pesan melalui sinyal dengan kecepatan $3,00 \times 10^8$ km/s. Berapa jam waktu yang diperlukan pesan tersebut untuk sampai ke Bumi?
- Berapakah nilai dari $\left(-\frac{5}{8} \times \frac{(-3)^2}{4} \times \frac{1}{6^3}\right) : \left(-\frac{2^2}{5}\right)^{-2}$?
- Jika $\frac{(0,12)^4(0,243)^4}{(1,8)^{18}} = \frac{2^x 3^y}{5^z}$, berapakah nilai $2x - y + 2z$?
- Temperatur pada inti matahari sekitar $1,55 \times 10^6$ derajat celcius. Bagaimanakah menyatakan temperatur tersebut dalam bentuk umum?
- Matahari mempunyai diameter $1,39 \times 10^6$ km, sedangkan Bumi berdiameter $1,28 \times 10^4$ km. Berapakah perbandingan diameter matahari dengan diameter bumi?



MATAHARI AKAN PADAM

Sumber: www.amanjurnal.it

Menurut Prof. George Gahauw:

"Suatu saat Matahari kehilangan bahan bakarnya. Tiba-tiba meletak sangat terang sekali yang tidak lama, lalu berangsur-angsur surut sampai mencapai 0°C."

Selatar tahun 1973, para ahli astronomi dari Amerika menyelidiki adanya bintik-bintik hitam di Matahari. Ternyata, bintik-bintik hitam itu berasal dari unsur yang sudah padam.

"Dengan bintik-bintik hitam tersebut, panas matahari menurun 6°C atau 1,5% dari suhu semula 6.000°C" (BBC London: 13 April 1978).

Matahari akan padam merupakan salah satu tanda-tanda besar akan datangnya hari kiamat, yang difirmankan oleh Allah Swt.:

"Matahari sudah tidak bersinar." (QS. 81: At Takwîr: 1)

Sampai pada akhir ayat selanjutnya:

"Maka kemanaakah kamu akan pergi?" (QS. 81: At Takwîr: 20)

B. Bentuk Akar

1. Bilangan Rasional dan Irasional

Bilangan rasional merupakan bilangan yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b merupakan bilangan bulat serta $b \neq 0$. Berikut beberapa contoh bilangan rasional.

- a. $\frac{3}{11}$ merupakan bilangan rasional karena berupa pecahan $\frac{a}{b}$ dengan $a = 3$ dan $b = 11$.
- b. $2 = \frac{6}{3}$ merupakan bilangan rasional karena dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ dengan $a = 6$ dan $b = 3$.
- c. $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ merupakan bilangan rasional karena dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ dengan $a = 13$ dan $b = 5$.

Bilangan desimal berulang termasuk bilangan rasional karena dapat dinyatakan ke dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ dengan a dan b merupakan bilangan bulat serta $b \neq 0$.

Penulisan bilangan desimal dapat disingkat, yaitu dengan menambahkan garis pada bilangan yang berulang, misalnya,

- a. $0,222222 \dots = 0,\overline{2}$
- b. $0,232323 \dots = 0,\overline{23}$
- c. $0,272727 \dots = 0,\overline{27}$
- d. $0,345345345 \dots = 0,\overline{345}$

Bilangan irasional (tidak rasional) merupakan bilangan yang tidak dapat dinyatakan ke dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$, dengan a dan b merupakan bilangan bulat serta $b \neq 0$, atau bukan berupa bilangan desimal berulang.

Berikut adalah beberapa contoh bilangan irasional.

- a. $0,455239876854 \dots$
- b. $\sqrt{3} = 1,73205080756 \dots$
- c. $\sin 60^\circ = 0,86602540378 \dots$
- d. $\tan 30^\circ = 0,57735026918 \dots$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah menyatakan bentuk desimal berulang $0,222222 \dots$ ke dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$?

Jawab:

Diketahui bentuk desimal berulang $0,222222 \dots$

Misalkan, $x = 0,222222 \dots$. Oleh karena perulangan hanya 1 angka, yaitu 2 maka x dikalikan dengan 10 sehingga diperoleh $10x = 2,222222 \dots$

$$10x = 2,222222 \dots$$

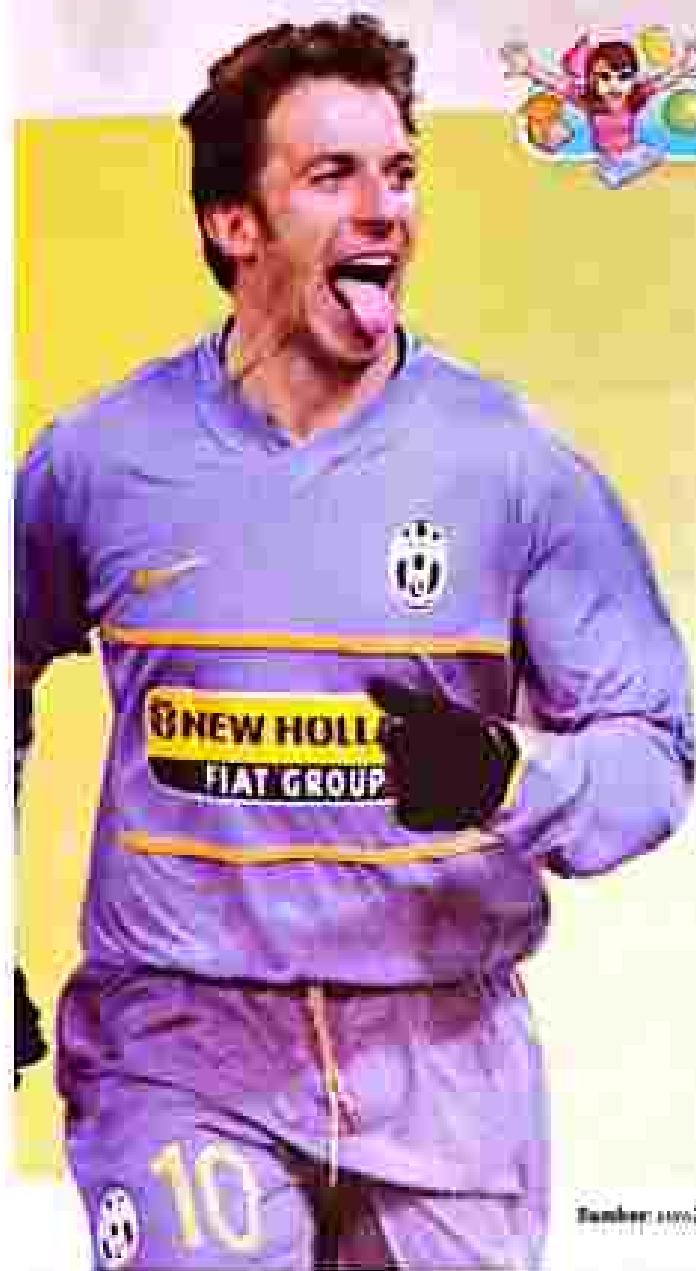
$$x = 0,222222 \dots$$

$$9x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9} \left(\text{bentuk pecahan } \frac{a}{b} \text{ di mana } a = 2 \text{ dan } b = 9 \right)$$

$$\text{Jadi, } x = 0,222222 \dots = \frac{2}{9}$$



MATH AROUND US



Dalam pertandingan sepak bola, produktivitas seorang penyerang dapat dilihat dari rata-rata gol yang diciptakan dalam kurun waktu tertentu yaitu banyaknya gol

banyaknya pertandingan

Pada liga seri A Italia tahun 2003/2004, **Alessandro Del Piero** menciptakan 16 gol dari 24 penampilannya. Banyaknya gol yang diciptakan Alessandro Del Piero dapat dinyatakan dalam bentuk desimal.

Alessandro Del Piero menciptakan 16 gol dari 24

$$\text{pertandingan} = \frac{\text{banyaknya gol}}{\text{banyaknya pertandingan}} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$0,6666\dots$$

$$3 \overline{) 20000}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \underline{18} \\ 20 \\ 18 \\ \underline{18} \\ 20 \\ 18 \\ \underline{18} \\ 20 \end{array}$$

Jadi, rata-rata banyaknya gol 0,6666... dan merupakan bilangan rasional karena merupakan desimal berulang.

Sumber: www.fifa.com

ASAHI OTAK

BILANGAN RASIONAL DAN IRASIONAL

- Perhatikan bilangan-bilangan berikut. Manakah yang termasuk bilangan rasional? Manakah yang termasuk bilangan irasional?
 - 2
 - $\cos 30^\circ$
 - $\sqrt{11}$
 - 3
 - $2\frac{3}{7}$
 - π
- Bagaimanakah menyatakan setiap bentuk berikut ke dalam bentuk pecahan biasa?
 - 0,77777777...
 - 0,45454545...
 - $0,\overline{23}$
 - $0,\overline{213}$

2. Pengertian Bentuk Akar

Pada saat membahas bilangan rasional dan bilangan irasional, dapat ditarik kesimpulan bahwa

$\sqrt{9} = 3$ termasuk bilangan rasional

$\sqrt{3} = 1,73205080756 \dots$ termasuk bilangan irasional

Dari uraian di atas, dapat dilihat bahwa $\sqrt{9} = 3$ (bilangan rasional), sedangkan

$\sqrt{3} = 1,73205080756 \dots$ (bilangan irasional). Di dalam matematika, suatu bilangan rasional yang

akarnya merupakan bilangan irasional dinamakan **bentuk akar**. Jadi, $\sqrt{3}$ termasuk bentuk akar.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Perhatikan bilangan-bilangan berikut, manakah yang merupakan bentuk akar?

- a. $\sqrt{5}$ b. $\sqrt{0,36}$ c. $\sqrt{8}$ d. $\sqrt{1,44}$

Jawab:

- a. $\sqrt{5}$ merupakan bentuk akar.
b. $\sqrt{0,36}$ bukan bentuk akar karena $\sqrt{0,36} = \sqrt{(0,6)^2} = 0,6$.
c. $\sqrt{8}$ merupakan bentuk akar.
d. $\sqrt{1,44}$ bukan bentuk akar karena $\sqrt{1,44} = \sqrt{(1,2)^2} = 1,2$.



MATH AROUND US

Seorang penerjun bebas melompat dari pesawat. Jika jarak penerjun sebelum membuka parasutnya adalah $d = 16t^2$ dengan d menyatakan jarak dalam meter dan t menyatakan waktu dalam detik. Rumus tersebut berlaku dengan menganggap tidak ada pengaruh angin. Waktu yang dibutuhkan penerjun tersebut sampai membuka parasutnya jika jarak penerjun setelah melompat adalah 816 meter sebelum membuka parasut adalah

$$d = 16t^2 \quad (\text{gunakan rumus yang diketahui})$$

$$816 = 16t^2 \quad (\text{masukkan nilai 816 pada } d)$$

$$t^2 = \frac{816}{16} = 51 \Leftrightarrow t = \sqrt{51}$$

Jadi, waktu yang diperlukan penerjun sampai ia membuka parasutnya adalah $\sqrt{51}$ detik.

3. Menyederhanakan Bentuk Akar

Bentuk akar seperti $\sqrt{8}$ dan $\sqrt{27}$ dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana. Artinya, bentuk akar tersebut dibuat sedemikian rupa sehingga bilangan di bawah tanda akar adalah bukan bilangan kuadrat, misalnya 4, 9, 16, dan 25.

Untuk menyederhanakan bentuk akar, kita bisa menggunakan sifat sebagai berikut.

$$\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ untuk } a \text{ dan } b \text{ anggota bilangan bulat positif}$$

Dari sifat di atas, bentuk akar dapat disederhanakan jika a dan atau b merupakan bilangan kuadrat. Jika a dan b bukan bilangan kuadrat maka bentuk akar tersebut sudah sederhana.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah bentuk sederhana setiap bentuk akar berikut?

- a. $\sqrt{8}$ c. $\sqrt{\frac{1}{18}}$
b. $\sqrt{27}$ d. $\sqrt{9p^3q}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \sqrt{8} &= \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(4 adalah bilangan kuadrat sehingga $\sqrt{4} = 2$)

$$\begin{aligned} \text{b. } \sqrt{27} &= \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

(9 adalah bilangan kuadrat sehingga $\sqrt{9} = 3$)

$$\begin{aligned} \text{c. } \sqrt{\frac{1}{18}} &= \sqrt{\frac{1}{18} \times \frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{36} \times (\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{36}} \times \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{2} \end{aligned}$$

(jadikan penyebut (18) menjadi bilangan kuadrat)

(ingat bahwa $\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$)

$$\begin{aligned} \text{d. } \sqrt{9p^3q} &= \sqrt{9p^2 \times pq} = \sqrt{(3p^2)^2 \times pq} \\ &= \sqrt{(3p^2)^2} \times \sqrt{pq} \\ &= 3p^2\sqrt{pq} \end{aligned}$$

ASAHI OTAK

MENYEDERHANAKAN BENTUK AKAR

Seperti apakah bentuk sederhana dari setiap bentuk akar berikut?

1. $\sqrt{72}$

6. $\sqrt{\sin 30^\circ}$

2. $\sqrt{20}$

7. $-\sqrt{48x}$

3. $2\sqrt{39}$

8. $\sqrt{3x^4y^2z}$

4. $\sqrt{\frac{1}{125}}$

9. $5\sqrt{\frac{1}{450}}$

5. $\sqrt{0,081}$

10. $\sqrt{\frac{3x^{10}y^2z^2}{27x^2y^3z^2}}$



ANWAR ZUNUDDIN

AL-KHAWARIZMI

Ahli Matematika, Astronomi, Astrologi, dan Geografi

Abu Abdullah Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi adalah nama lengkap al-Khawarizmi. Beliau dikenal dengan sebutan Bapak Aljabar. Tanggal lahir dan kematiannya tidak diketahui secara pasti. Akan tetapi, beliau dikatakan hidup di antara tahun 790 sampai dengan 840 Masehi. Ada juga yang menyatakan beliau lahir pada tahun 780 Masehi dan meninggal dunia pada tahun 850 Masehi.

Al-Khawarizmi menulis tentang kuadrat dan akar ketika pertama belajar di Yunani dan Mesir, yaitu:

- kuadrat dari $3^2 = 3 \times 3 = 9$
- akar dari 9 adalah $\sqrt{9} = 3$

Sumber: <http://www.dhammadownload.com/4412/4412a.html>



Sumber: <http://www.dhammadownload.com/4412/4412a.html>

4. Operasi Aljabar pada Bentuk Akar

a. Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Untuk memahami penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar, perhatikan bentuk akar $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, dan $2\sqrt{5}$. Bentuk akar $2\sqrt{2}$ dan $3\sqrt{2}$ memiliki bentuk akar yang sama (sejenis), yaitu $\sqrt{2}$. Adapun $\sqrt{5}$ dan $2\sqrt{5}$ memiliki bentuk akar yang sama (sejenis), yaitu $\sqrt{5}$.

Suatu bentuk akar yang sejenis dapat dijumlahkan atau dikurangkan, yaitu dengan cara menambah atau mengurangi bilangan yang ada di depan bentuk akar (koefisien) tersebut.

Secara umum, penjumlahan dan pengurangan bentuk akar dapat dituliskan sebagai berikut.

Untuk a , b , dan c anggota bilangan rasional positif, berlaku

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c} \text{ dan } a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana cara menyederhanakan bentuk akar berikut?

a. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ b. $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72}$

Jawab:

a. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ memiliki bentuk akar sejenis, yaitu $\sqrt{3}$.

Untuk menyederhanakannya, jumlahkan masing-masing koefisiennya sehingga $(2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.

b. $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72}$ belum mempunyai bentuk akar sejenis. Oleh karena itu, sederhanakan setiap bentuk akar dengan cara mengubah bilangan yang berada di dalam tanda akar menjadi bentuk perkalian yang salah satunya merupakan bilangan kuadrat.

$$\begin{aligned}\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72} &= \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{36 \times 2} \\ &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \quad (\text{bentuk akar sejenisnya adalah } \sqrt{2})\end{aligned}$$

Untuk menyederhanakannya, jumlahkan masing-masing koefisiennya sehingga $(2 + 4 + 6)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

Tanya:

Seperti apakah proses menyederhanakan bentuk akar $\sqrt{p} + \sqrt{4p} - \sqrt{9p}$?

Jawab:

$$\sqrt{p} + \sqrt{4p} - \sqrt{9p}$$

(belum mempunyai bentuk akar sejenis)

$$= \sqrt{p} + \sqrt{4 \times p} - \sqrt{9 \times p}$$

(sederhanakan setiap bentuk akar dengan cara mengubah bilangan yang berada di dalam tanda akar menjadi bentuk perkalian yang salah satunya merupakan bilangan kuadrat)

$$= \sqrt{p} + 2\sqrt{p} - 3\sqrt{p}$$

(bentuk akar sejenisnya adalah $\sqrt{p}$)

$$= (1 + 2 - 3)\sqrt{p}$$

(jumlah dan kurangkan koefisiennya)

$$= 0\sqrt{p} = 0$$

b. Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Bentuk akar dapat dikali atau dibagi, yaitu dengan menjadikan bentuk akar tersebut menjadi satu akar dan mengalikan atau membagi bilangan yang ada di dalam akar tersebut. Secara umum dapat dituliskan

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \text{ dan } \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Sepereti apakah bentuk sederhana dari setiap bentuk akar berikut?

- a. $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ c. $\sqrt{24} : \sqrt{6}$
b. $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}$ d. $\frac{\sqrt{6} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Jawab:

a. $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

b. $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = (2 \times 3) \sqrt{3 \times 2}$

(kalikan koefisien dengan koefisien dan bentuk akar dengan bentuk akar)

$$= 6\sqrt{6}$$

c. $\sqrt{24} : \sqrt{6} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$ $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

d. $\frac{\sqrt{6} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6 \times 2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{\frac{4 \times 3}{3}} = \sqrt{4} = 2$

Tanya:

Langkah apa yang harus dilakukan sehingga bentuk akar berikut menjadi sederhana?

a. $\frac{\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}}{\sqrt{96}}$

b. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$

Jawab:

a. $\frac{\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}}{\sqrt{96}}$

(pembilang belum memiliki bentuk akar sejenis)

$$= \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}$$

(sederhanakan tiap bentuk akarnya, sehingga memiliki bentuk akar sejenis, yaitu $\sqrt{6}$)

$$= \frac{(2+3-5)\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = \frac{0}{4\sqrt{6}} = 0$$

b. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) = (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) - (5\sqrt{2} \times \sqrt{3}) - (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) + (5\sqrt{2} \times \sqrt{2})$
 $= 3 - 5\sqrt{6} - \sqrt{6} + (5 \times 2)$
 $= 3 + 10 - (5+1)\sqrt{6}$
 $= 13 - 6\sqrt{6}$

ASAHI OTAK

OPERASI ALJABAR PADA BENTUK AKAR

1. Coba kamu sederhanakan setiap bentuk akar berikut.

- | | | |
|--|--|---|
| a. $3\sqrt{3} + \sqrt{5}$ | e. $4\sqrt{3} - \sqrt{3}$ | i. $\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{147}$ |
| b. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ | f. $3\sqrt{32} - \sqrt{18}$ | j. $\sqrt{35} + \sqrt{7} - \sqrt{28}$ |
| c. $\sqrt{x} + \sqrt{4x} + \sqrt{9x}$ | g. $\sqrt{180} - \sqrt{80} - \sqrt{245}$ | k. $\sqrt{125} - \sqrt{45} + \sqrt{20}$ |
| d. $\sqrt{18} + \sqrt{8}$ | h. $\sqrt{128} - \sqrt{98} + \sqrt{50}$ | l. $\sqrt{150} - 3\sqrt{54} + 5\sqrt{48}$ |

2. Agar kamu semakin paham, coba sederhanakan bentuk akar lainnya berikut ini.

- | | | |
|---|---|---|
| a. $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ | e. $\frac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ | i. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ |
| b. $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}$ | f. $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ | j. $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$ |
| c. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}$ | g. $\frac{3\sqrt{8} \times 6\sqrt{8}}{\sqrt{162}}$ | k. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ |
| d. $\sqrt{8} : \sqrt{2}$ | h. $\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})$ | l. $\frac{2\sqrt{64}^{2n}}{\sqrt{16}^{3n}}$ |

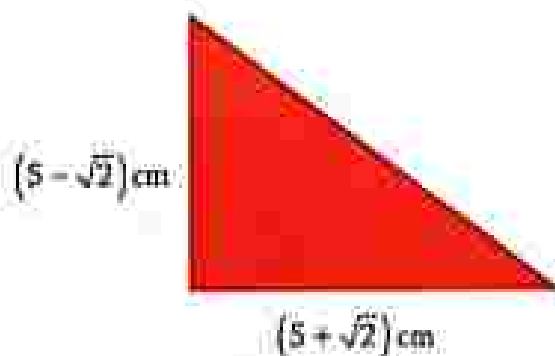
3. Sekarang, saatnya menentukan nilai dari $\frac{4}{(\sqrt{11} + \sqrt{3})(\sqrt{11} - \sqrt{3})}$.

4. Misalkan, $x = 2 + \sqrt{3}$ dan $y = 2 - \sqrt{3}$. Substitusikan nilai-nilai x dan y tersebut ke dalam bentuk-bentuk berikut.

- $2x + 2y$
- $5xy$
- $x^2 + y^2$

Bagaimana hasilnya, apakah sudah sederhana? Jika belum, sederhanakanlah!

5. Tentukan keliling dan luas segitiga berikut.



5. Merasionalkan Bentuk Akar

Jika p dan q merupakan bilangan rasional positif maka bentuk $\sqrt{(p+q)+2\sqrt{pq}}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ dan bentuk $\sqrt{(p+q)-2\sqrt{pq}}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{p} - \sqrt{q}$.

Pengubahan tersebut dinamakan merasionalkan bentuk akar. Untuk lebih memahami cara merasionalkan bentuk akar, perhatikan uraian berikut.

$$\begin{aligned}(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 &= (\sqrt{p})^2 + 2\sqrt{pq} + (\sqrt{q})^2 \\&= p + 2\sqrt{pq} + q \\&= (p+q) + 2\sqrt{pq}\end{aligned}$$

Jika ruas kiri dan kanan ditarik akarnya maka diperoleh

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{(p+q) + 2\sqrt{pq}}$$

dengan langkah yang sama akan diperoleh

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \sqrt{(p+q) - 2\sqrt{pq}}$$

dengan syarat $p > q$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana bentuk $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ jika dinyatakan dalam $\sqrt{p} + \sqrt{q}$?

Jawab:

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5 \cdot 3}}$$

$$= \sqrt{5+2\sqrt{5 \cdot 3}+3}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

(nilai p dan q yang memenuhi apabila dijumlahkan 8 dan dikalikan 15 adalah 5 dan 3)

(pindahkan 3 ke suku terakhir)

(ingat $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$)

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana bentuk $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ jika dinyatakan dalam $\sqrt{p} - \sqrt{q}$?

Jawab:

$$\begin{aligned}\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} &= \sqrt{9 - 2\sqrt{20}} \\ &= \sqrt{(5 + 4) - 2\sqrt{5 \cdot 4}} \\ &= \sqrt{5 - 2\sqrt{5 \cdot 4} + 4} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{4} + (\sqrt{4})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{4})^2} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{4} \\ &= \sqrt{5} - 2\end{aligned}$$

$$\sqrt{(p + q) + 2\sqrt{pq}}$$

(nilai p dan q yang memenuhi jika dijumlahkan sama dengan 9 dan jika dikalikan sama dengan 20 adalah 5 dan 4)

(pindahkan 4 ke suku terakhir)

(ubah 5 menjadi $(\sqrt{5})^2$ dan 4 menjadi $(\sqrt{4})^2$)

(ingat $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$)

Tanya:

Bagaimana bentuk $\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}$ jika dinyatakan dalam $\sqrt{p} + \sqrt{q}$?

Jawab:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{1})^2 + 2\sqrt{1}\sqrt{\frac{1}{2}} + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{(p + q) + 2\sqrt{pq}}$$

(nilai p dan q yang memenuhi jika dijumlahkan sama dengan $\frac{3}{2}$ dan jika dikalikan sama dengan $\frac{1}{2}$

adalah 1 dan $\frac{1}{2}$)

(pindahkan $\frac{1}{2}$ ke suku terakhir)

(ingat bahwa $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$)

6. Merasionalkan Penyebut

Suatu pecahan yang penyebutnya mengandung bentuk akar dapat dirasionalkan dengan cara mengalikan pembilang dan penyebut pecahan tersebut dengan bentuk sekawan dari penyebutnya. Adapun bentuk-bentuk pecahan yang mengandung bentuk akar dapat dikelompokkan menjadi beberapa kelompok, yaitu sebagai berikut.

a. Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dapat dirasionalkan dengan mengalikan pecahan tersebut dengan 1 yang berbentuk $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana cara merasionalkan bentuk-bentuk berikut? Seperti apa bentuk rasionalnya?

a. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\sqrt{0,1}$

d. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

Jawab:

a. $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{kalikan dengan } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$
 $= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{Bentuk rasionalnya adalah } \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{nyatakan dalam bentuk } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)$
 $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{kalikan dengan } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$
 $= \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \rightarrow \text{Bentuk rasionalnya adalah } \frac{1}{2}\sqrt{6}$

c. $\sqrt{0,1} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10}} \quad \left(\text{nyatakan dalam bentuk } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)$
 $= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{1}{10}\sqrt{10} \rightarrow \text{Bentuk rasionalnya adalah } \frac{1}{10}\sqrt{10}$

d. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{kalikan dengan } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$
 $= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 2}}{2(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{4} \rightarrow \text{Bentuk rasionalnya adalah } \frac{\sqrt{10}}{4}$

b. Bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ dan $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$

Merasionalkan bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ dan $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ adalah dengan mengalikan penyebutnya dengan 1 dalam bentuk pecahan bentuk sekawan penyebutnya.

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

dan

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}} \times \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana proses merasionalkan bentuk-bentuk berikut?

a. $\frac{3}{4+\sqrt{3}}$ b. $\frac{\sqrt{2}}{3+5\sqrt{2}}$ c. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-4\sqrt{3}}$

Jawab:

a. $\frac{3}{4+\sqrt{3}} = \frac{3}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ (bentuk sekawan dari $4+\sqrt{3}$ adalah $4-\sqrt{3}$)

$$= \frac{3(4-\sqrt{3})}{4^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{12-3\sqrt{3}}{16-3} = \frac{12-3\sqrt{3}}{13}$$

b. $\frac{\sqrt{2}}{3+5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3+5\sqrt{2}} \times \frac{3-5\sqrt{2}}{3-5\sqrt{2}}$ (bentuk sekawan dari $3+5\sqrt{2}$ adalah $3-5\sqrt{2}$)

$$= \frac{\sqrt{2}(3-5\sqrt{2})}{3^2-(5\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}-10}{9-50} = \frac{10-3\sqrt{2}}{41}$$

c. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-4\sqrt{3}} \times \frac{2+4\sqrt{3}}{2+4\sqrt{3}}$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2+4\sqrt{3})}{2^2-(4\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+12+2\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{4-48}$$

$$= \frac{12+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{-44} = \frac{-(6+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{6})}{22}$$

ASAHI OTAK

MERASIONALKAN BENTUK AKAR

1. Nyatakan setiap bentuk berikut dalam bentuk $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ atau $\sqrt{p} - \sqrt{q}$.

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|--|
| a. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ | d. $\sqrt{43+12\sqrt{7}}$ | g. $\sqrt{17-6\sqrt{\frac{9}{2}}}$ |
| b. $\sqrt{9-2\sqrt{10}}$ | e. $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$ | h. $\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{24}}$ |
| c. $\sqrt{21+8\sqrt{5}}$ | f. $\sqrt{17-2\sqrt{70}}$ | i. $\sqrt{3\frac{1}{2}+2\sqrt{3}}$ |

2. Tentukan nilai dari $(3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

3. Tentukan nilai $a + b$ jika bentuk $\left(\frac{4}{3+\sqrt{5}}\right)^2$ dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{c}$, dengan a, b , dan c anggota bilangan bulat.

4. Tentukan bentuk sekawan dari setiap bentuk berikut.

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------------|
| a. $2 + \sqrt{5}$ | c. $\sqrt{5} - 4$ | e. $\sqrt{3} - \sqrt{7}$ |
| b. $3 - \sqrt{2}$ | d. $-7 - \sqrt{3}$ | f. $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ |

5. Rasionalkan setiap pecahan berikut.

- | | | |
|--|--|--|
| a. $\frac{3}{\sqrt{2}}$ | e. $\frac{2-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ | i. $\frac{2-\sqrt{3}}{2-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ |
| b. $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ | f. $\frac{2+\sqrt{5}}{2+3\sqrt{5}}$ | j. $\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$ |
| c. $\frac{9}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ | g. $\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ | k. $\frac{p}{\sqrt{p+q}-\sqrt{p}}$ |
| d. $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ | h. $\frac{2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$ | l. $\frac{\sqrt{p+q}+\sqrt{p}}{\sqrt{p+q}+\sqrt{p}}$ |

6. Jika bilangan a dan b dihubungkan oleh $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = 3\frac{1}{3}$ dengan $a+b \neq 0$ dan $a-b \neq 0$, tentukan $a:b$.



AMAZING PERSON

AL-SAMAWAL (1136 - 1180)

Ahli Matematika dan Astronomi

Al-Samawal memiliki nama lengkap **Ibn Yahya al-Maghribi al-Samawal**. Ketika berusia 19 tahun, beliau menulis buku matematika yang diberi judul, *Al-Bahir fi-l-Jabr*. Di dalam bukunya tersebut, beliau mendeskripsikan tentang mengubah bilangan irasional menjadi bilangan rasional.

Beliau dapat mengubah $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6}}$ menjadi $\frac{5\sqrt{6} + 2\sqrt{5} + 6\sqrt{15} - 20\sqrt{2}}{13}$.

Sumber: <http://www.kalung.com.au/pidm/ibn-yahya-maghribi-al-samawal.html>

INFO MATEMATIKA

Menentukan nilai bilangan berpangkat, menarik akar kuadrat dari suatu bilangan, dan menarik akar pangkat 3 dari suatu bilangan dengan bantuan kalkulator ilmiah.

1. Cara Menentukan Nilai Bilangan Berpangkat

Misalnya, kamu akan menentukan nilai dari 4^3 .

Untuk menentukan nilai 4^3 dengan bantuan kalkulator, kamu tinggal menekan tombol



Pada layar akan muncul 64.

Selain itu, kamu juga dapat menekan tombol



Pada layar akan muncul 64.

2. Cara menarik akar kuadrat dari suatu bilangan

Misalnya, kamu diminta untuk menarik akar kuadrat dari 25.

Pada kalkulator, tombol-tombol yang dapat kamu tekan adalah



Pada layar akan muncul 5.

3. Cara menarik akar pangkat 3 dari suatu bilangan

Misalnya, kamu diminta untuk menarik akar pangkat 3 dari 216.

Pada kalkulator, tombol-tombol yang dapat kamu tekan adalah



Pada layar akan muncul 6.

Diskusikan dengan temanmu, bagaimana menarik akar pangkat 4 dari 81 menggunakan kalkulator.

C. Pangkat Rasional

1. Pangkat Pecahan

a. Bentuk $a^{\frac{1}{n}}$ dengan $n \geq 2$

Pada bagian terdahulu, kamu telah mengenal tanda akar " $\sqrt{\quad}$ ". Bentuk akar " $\sqrt{\quad}$ " dibaca akar pangkat dua, biasanya hanya dibaca akar. Selain akar pangkat dua, terdapat juga akar pangkat tiga ($\sqrt[3]{\quad}$), akar pangkat empat ($\sqrt[4]{\quad}$), dan seterusnya. Setiap bentuk akar tersebut dapat dituliskan ke dalam bentuk pangkat dan sebaliknya. Adapun pengubahan dari bentuk akar ke bentuk pangkat maupun sebaliknya dapat dilihat pada contoh berikut.

• Jika $2^5 = 32$ maka $(\sqrt[5]{32}) = 2$

• Jika $3^4 = 81$ maka $(\sqrt[4]{81}) = 3$

• Jika $4^3 = 16$ maka $(\sqrt[3]{16}) = 4$

Secara umum ditulis sebagai berikut.

$$\text{Jika } x^n = a \text{ maka } x = \sqrt[n]{a} \text{ dengan } n \geq 2 \text{ dan } n \text{ bilangan asli}$$

Untuk mengubah bentuk $a^{\frac{1}{n}}$ ke $\sqrt[n]{a}$, perhatikan contoh berikut.

a. $\sqrt[5]{x} = x^p$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[5]{x})^5 = (x^p)^5 \quad (\text{pangkatkan kedua ruas dengan 5})$$

$$\Leftrightarrow x = x^{5p}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 5p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{5}$$

$$\text{Jadi, } \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$$

b. $\sqrt[3]{x} = x^p$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = (x^p)^3 \quad (\text{pangkatkan kedua ruas dengan 3})$$

$$\Leftrightarrow x = x^{3p}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 3p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi, } \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

Uraian tersebut memperjelas pernyataan berikut.

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}; n \geq 2 \text{ dan } n \text{ bilangan asli}$$

b. Bentuk $a^{\frac{m}{n}}$

Untuk mengubah $a^{\frac{m}{n}}$ ke dalam bentuk akar, kamu dapat menggunakan sifat-sifat yang sudah dipelajari sebelumnya.

$$\begin{aligned}a^{\frac{m}{n}} &= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \\&= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \\&= \sqrt[n]{a^m}\end{aligned}$$

Dari uraian tersebut, diperoleh bentuk umum perpangkatan bentuk $a^{\frac{m}{n}}$, yaitu sebagai berikut.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dengan } m \in B, n \in A; n \geq 2, \sqrt[n]{a} \in R \text{ dan } \sqrt[n]{a} \neq 0$$

Untuk lebih memahaminya, perhatikan beberapa contoh berikut.

- $216^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{216}) = (\sqrt[3]{(6)^3}) = 6^{\frac{1}{3}} = 6$
- $64^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{64^2}) = (\sqrt[3]{[(2)^3]^2}) = (\sqrt[3]{(2)^{12}}) = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4 = 16$
- $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{[(3)^4]^3}) = (\sqrt[4]{(3)^{12}}) = 3^{\frac{12}{4}} = 3^3 = 243$

2. Sifat-Sifat Pangkat Pecahan

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mengenal sifat-sifat operasi hitung pada bilangan bulat. Sifat-sifat yang berlaku pada bilangan bulat juga berlaku untuk pangkat pecahan atau pangkat rasional. Sifat-sifat tersebut adalah sebagai berikut.

Jika $a, b \in R$ di mana $a, b \neq 0$, p, q dan n bilangan rasional maka berlaku

- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $(a \times b)^p = a^p \times b^p$
- $a^p : a^q = a^{p-q}, a \neq 0$
- $(a^p \times b^q)^r = a^{p \times r} \times b^{q \times r}$
- $(a^p)^q = a^{p \times q}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ dan $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

LET'S DO IT

Besama teman sebangkumu, tunjukkan bahwa sifat-sifat operasi hitung di atas berlaku untuk bilangan berpangkat pecahan.



TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana menyederhanakan setiap bentuk berikut?

a. $\left(\sqrt{\frac{2^{x+2}}{4^{1-x}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ b. $\left(\frac{27a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}{8a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$

Jawab:

a. $\left(\sqrt{\frac{2^{x+2}}{4^{1-x}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{2^{x+2}}{4^{1-x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}$
 $= \left(\frac{2^{x+2}}{(2)^{2(1-x)}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2^{x+2}}{2^{2-2x}}\right)^{\frac{1}{3}} = (2^{x+2-2+2x})^{\frac{1}{3}} = 2^x$

b. $\left(\frac{27a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}}{8a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(3)^3 a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}}}{(2)^3 a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$
 $= \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 a^{\frac{2}{3}} b^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{3}{2} (ab^{-2}) = \frac{3a}{2b^2}$

Tanya:

Berapakah hasil operasi berikut?

a. $6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{6}}$ c. $\frac{9^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}}$
 b. $\sqrt[3]{4^2} \times 2\sqrt[3]{2^2}$ d. $\sqrt[3]{81^2} : \sqrt[3]{81^2}$

Jawab:

a. $6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1+2+1}{6}} = 6^{\frac{4}{6}} = 6^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt[3]{4^2} \times 2\sqrt[3]{2^2} = 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = 2^3 = 8$

c. $\frac{9^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{2}{2}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{6}-\frac{2}{6}} = 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$

d. $\sqrt[3]{81^2} : \sqrt[3]{81^2} = 81^{\frac{2}{3}} : 81^{\frac{2}{3}} = 81^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} = 81^{\frac{0}{3}} = 81^0 = (3^4)^0 = 3^0 = 1$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah hasilnya?

a. $\left(4^{\frac{1}{2}}9^{\frac{1}{2}}\right)^2$

b. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)$

c. $\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Jawab:

a. $\left(4^{\frac{1}{2}}9^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left((2^2)^{\frac{1}{2}}(3^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(2^13^1\right)^2 = 2^2 \times 3 = 16 \times 3 = 48$

b. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right) = \left(\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 2}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^1$

c. $\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{(3^2)^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$

Tanya:

Bagaimana proses menyederhanakan bentuk $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}\right)^2 \times \left(a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2$?

Jawab:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}\right)^2 \times \left(a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= \left[\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2\left(a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}\right) + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2\right] \times \left[\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 + 2\left(a^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\right) + \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$= \left[a^{\frac{1}{2}} - 2\left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) + a^{\frac{1}{4}}\right] \times \left[a^{\frac{1}{2}} + 2\left(a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\right) + a^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \left[a^{\frac{1}{2}} - 2 + a^{\frac{1}{4}}\right] \times \left[a^{\frac{1}{2}} + 2 + a^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} - 4 - 2a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$$

$$= a^1 + 2a^{\frac{1}{2}} + a^1 - 2a^{\frac{1}{2}} - 4 - 2a^{\frac{1}{2}} + a^1 + 2a^{\frac{1}{2}} + a^1$$

$$= \frac{1}{a} + a - 2$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 1}{a}$$

3. Persamaan Eksponen Sederhana

Ketika SMP, kamu telah mengenal apa yang dimaksud dengan persamaan. **Persamaan** merupakan suatu kalimat terbuka yang memuat tanda kesamaan atau sama dengan. Sekarang, kamu akan mempelajari suatu bentuk persamaan yang dinamakan persamaan eksponen.

Persamaan eksponen merupakan suatu persamaan yang variabelnya bertindak sebagai eksponen atau pangkat suatu bilangan tertentu dalam persamaannya. Berikut adalah beberapa contoh persamaan eksponen.

- a. $2^x = 8$
- b. $3^{2x-4} = 81^{x-1}$

Nilai yang menggantikan persamaan tersebut sehingga persamaan tersebut menjadi benar dinamakan **penyelesaian**.

Adapun cara menentukan penyelesaian suatu persamaan eksponen adalah sebagai berikut.

- (1) Menyamakan bilangan pokok kedua ruas (jika bilangan pokok belum sama)
- (2) Jika bilangan pokok kedua ruas sudah sama maka pangkat kedua ruas juga sama

Jika $a^{f(x)} = a^b$ maka $f(x) = b$ dan jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ maka $f(x) = g(x)$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai x yang memenuhi $9^{2x-3} = 27$?

Jawab:

$$\begin{aligned} 9^{2x-3} &= 27 && \text{(bilangan pokok kedua ruas belum sama)} \\ \Leftrightarrow (3^2)^{2x-3} &= 3^3 && \text{(nyatakan kedua ruas dengan bilangan pokok 3)} \\ \Leftrightarrow 3^{4x-6} &= 3^3 && \text{(kedua ruas akan bernilai sama jika pangkatnya sama)} \\ \Leftrightarrow 4x - 6 &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi $9^{2x-3} = 27$ adalah $x = \frac{9}{4}$.

Tanya:

Berapakah nilai x yang memenuhi $(\sqrt[3]{2})^{x+10} = 8$?

Jawab:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{2})^{x+10} &= 8 \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x+10} = 2^3 \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{x+10}{3}} = 2^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+10}{3} = 3 \Leftrightarrow x+10 = 9 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi $(\sqrt[3]{2})^{x+10} = 8$ adalah $x = -1$.

ASAHI OTAK

PANGKAT RASIONAL

1. Nyatakan setiap bentuk berikut ke dalam bentuk akar.

a. $p^{\frac{1}{3}}$

c. $(p+q)^{\frac{1}{4}}$

e. $(9p)^{\frac{1}{5}}$

b. $3p^{\frac{1}{2}}$

d. $(p-q)^{\frac{2}{3}}$

f. $8p^{\frac{1}{3}} - 5m^{\frac{1}{4}}$

2. Nyatakan setiap bentuk berikut ke dalam pangkat pecahan.

a. $\sqrt[3]{p}$

c. $\frac{2}{\sqrt[3]{p}}$

e. $\sqrt{p^{-2}} + \frac{1}{\sqrt{p}}$

b. $\frac{1}{\sqrt[3]{p}}$

d. $\sqrt[3]{p^2} - \frac{1}{9\sqrt[3]{p}}$

f. $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[3]{p^2}$

3. Hitunglah.

a. $256^{\frac{1}{4}}$

c. $\sqrt[5]{16}$

e. $27^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{4}}$

b. $(125^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

d. $\sqrt[3]{2^3 \cdot 16^3}$

f. $\sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{3^3}$

4. Sederhanakan setiap bentuk berikut.

a. $p^{\frac{1}{2}} \times p^{\frac{1}{3}}$

d. $\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

e. $\left(\frac{p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{3}}}{r^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{pq^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{3}}}$

b. $p^{\frac{1}{2}} (p^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

e. $\left((2\sqrt{2})^2 + 9\right)^{\frac{1}{2}}$

h. $\frac{1}{\left(p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

c. $p^{\frac{1}{12}} \left(p^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

f. $p \left(p \left(p^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

i. $(2^3 + 3^3 + 6^3)^{\frac{1}{3}}$

5. Hitunglah.

a. $16^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} - 243^{\frac{1}{5}}$

c. $3\sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{9} \times \frac{1}{3} \sqrt[5]{27}$

b. $27^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{4}}$

d. $\left(\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (2^3) 3\right) 3}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} (3^3) 2\right) 2}\right)^{\frac{1}{2}}$

6. Jika $x = 25$ dan $y = 64$, tentukan nilai $\frac{x^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{y}}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}$.

7. Hitunglah nilai dari $5a + 2b + \sqrt{25a^2 - 20ab + 4b^2}$ untuk $a = \frac{1}{8^{\frac{1}{2}}}$ dan $b = 9^{\frac{2}{3}}$.

8. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan-persamaan berikut.

a. $8^{2x+1} = 1$

e. $\left(\frac{3}{3^{x+2}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = 1$

b. $64^{x+2} = \frac{3}{48}$

f. $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 5^2 \sqrt{5^{2x+1}}$

c. $\frac{18\sqrt{3^{x+1}}}{3} = 2$

g. $2^x \cdot (2^{x+1})^y \cdot (2^x)^{y+z} = 8$

d. $\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{243}}\right)^{2x}}{3^{x+4}} = 1$

h. $25\sqrt{5^{3x}} \cdot \sqrt{125^{2x}} = \frac{125^{x+2}}{5^{3x}}$



AMAZING PERSON!

AL-QALASADI (1412 - 1486)

Ahli Matematika dan Sarjana Ilmu Waris Islam

Nama lengkap Al-Qalasadi adalah **Abu'l Hasan Ibn Ali Al-Qalasadi**.

Beliau dilahirkan pada tahun 1412 di Bastah (Baza), Spanyol.

Al-Qalasadi merupakan ilmuwan pertama yang memperkenalkan simbol aljabar.

Beliau menggunakan simbol aljabar dengan kata-kata pendek dalam bahasa Arab atau inisialnya saja. Beliau menulis beberapa buku mengenai aritmetika dan aljabar. Salah satunya adalah al-Tabsira fi'l-m al-hisab, yang berarti "Penjelasan Ilmu Aritmetika".

Di dalam bidang aljabar, beliau menggunakan

wa untuk +

illa untuk -

fi untuk $\times$

ala untuk $\div$

j dari kata "jadah" artinya "akar"

sh dari kata "shay" artinya "sesuatu" (x , belum diketahui)

m dari kata "mal" untuk x^2

k dari kata "kab" untuk x^3

l dari kata "yadilu" untuk $\div$

Beliau meninggal pada tahun 1486 di Beja, Tunisia.

Sumber: <http://www.kunirp.net/~submat.ac.id/Blogmaths/Al-Qalasadi.html>

D. Logaritma

1. Pengertian Logaritma

Logaritma merupakan kebalikan (invers) dari eksponen (perpangkatan). Dengan demikian, perpangkatan dapat dinyatakan dengan logaritma atau sebaliknya. Misalnya,

- $2^3 = 8$ jika dinyatakan dalam bentuk logaritma menjadi ${}^2\log 8 = 3$.
- $2^{-3} = \frac{1}{8}$ jika dinyatakan dalam bentuk logaritma menjadi ${}^2\log \frac{1}{8} = -3$.

Secara umum, logaritma suatu bilangan didefinisikan sebagai berikut:

Jika $a^x = b$ es ${}^a\log b = x$ dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$.

Keterangan: a dinamakan bilangan pokok (basis)

b dinamakan bilangan yang dicari logaritmanya (numerus)

x adalah hasil logaritma

Dari definisi di atas, kita akan mendapatkan sifat yang lain, yaitu sebagai berikut.

- ${}^a\log a = 1$ karena $a^1 = a$
- ${}^a\log 1 = 0$ karena $a^0 = 1$
- ${}^a\log a^n = n$ karena $a^n = a^n$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai logaritma berikut?

- a. ${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{32}$ b. ${}^4\log 2$ c. ${}^5\log 0,04$

Jawab:

a. ${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{32} = {}^{\frac{1}{2}}\log \left(\frac{1}{2}\right)^5 = -5$ (ingat ${}^a\log a^n = n$)

b. ${}^4\log 2 = {}^4\log 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ (ingat ${}^a\log a^n = n$)

c. ${}^5\log 0,04 = {}^5\log \frac{4}{100} = {}^5\log \frac{1}{25} = {}^5\log 5^{-2} = -2$ (ingat ${}^a\log a^n = n$)

Notes

Jika bilangan pokoknya sama dengan 10 maka bilangan pokok tersebut biasanya tidak dituliskan. Misalnya, ${}^{10}\log 1.000$ cukup ditulis $\log 1.000$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Jika ${}^4\log 3 = -0,3$, apakah terbukti bahwa $g = \frac{1}{81} \sqrt[3]{9}$?

Jawab:

$${}^4\log 3 = -0,3 \Leftrightarrow 3^{-0,3} = g$$

$$\Leftrightarrow g = 3^{-\frac{3}{10}}$$

$$\Leftrightarrow g = 3^{-\frac{3}{10}} = 3^{\frac{-12 \times 3}{10}} = 3^{\frac{-36}{10} + \frac{2}{10}} = 3^{-3 + \frac{2}{10}}$$

$$= 3^{-3} \cdot 3^{\frac{2}{10}} = \frac{1}{3^3} \sqrt[5]{3^2} = \frac{1}{81} \sqrt[5]{9}$$

(ingat, $a^x = b \Leftrightarrow {}^a\log b = x$)

(gunakan sifat-sifat pangkat rasional)

(bentuk pangkat diubah ke dalam akar)

Jadi, terbukti bahwa $g = \frac{1}{81} \sqrt[5]{9}$.

ASAHI OTAK PENGERTIAN LOGARITMA

1. Nyatakan setiap bentuk berikut dalam bentuk logaritma.

a. $3^4 = 81$

c. $27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

e. $(x+y)^3 = 5$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

d. $32^{\frac{2}{5}} = 4$

f. $(xy)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{27}$

2. Nyatakan setiap bentuk berikut dalam bentuk perpangkatan.

a. $\log 10.000 = 4$

c. ${}^9\log \frac{1}{243} = -5$

e. ${}^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{125} = 3$

b. $\log \frac{1}{100} = -2$

d. ${}^{\frac{1}{3}}\log 16 = -4$

f. ${}^9\log \left(\frac{1}{x}\right)^{-2} = 3$

3. Hitunglah nilai logaritma berikut.

a. ${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{64}$

c. ${}^9\log 729$

e. ${}^9\log \frac{1}{49}$

b. $\log \left(\frac{1}{100}\right)^{-2}$

d. ${}^9\log \frac{1}{256}$

f. ${}^{\frac{1}{4}}\log 64$

2. Menentukan Logaritma Suatu Bilangan

Pada bagian sebelumnya, kamu telah dapat menentukan nilai logaritma suatu bilangan.

Misalnya, ${}^3\log 27 = 3$ karena $3^3 = 27$ dan ${}^2\log 16 = 4$ karena $2^4 = 16$.

Sekarang, bagaimana cara menentukan logaritma seperti ${}^2\log 5 = a$? Dalam hal ini, 5 tidak dapat ditentukan secara langsung dengan 2^a . Terdapat beberapa cara untuk menentukan logaritma yang seperti itu, yaitu sebagai berikut.

- (1) Menggunakan grafik $y = a^x$,
- (2) menggunakan tabel, dan
- (3) menggunakan kalkulator.

Pada bagian ini, akan dibahas dua cara terakhir yaitu menentukan logaritma dengan menggunakan tabel dan kalkulator.

a. Menentukan Logaritma Bilangan Antara 1 dan 10 dengan Menggunakan Tabel Logaritma

Sebelum mempelajari cara menentukan nilai suatu logaritma dengan tabel, kamu perlu memahami bagian-bagian tabel logaritma terlebih dulu. Berikut disajikan tabel logaritma dengan bilangan pokok (basis) 10.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.										
.										
1.8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1.9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2.0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2.1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2.2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2.3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2.4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2.5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2.6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4218	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
.										
.										

Keterangan:

1. Kolom N memuat bilangan logaritma antara 0 sampai dengan 1.000.
2. Kolom 0-9 memuat mantis (mantissa), yaitu bilangan desimal yang menyatakan hasil logaritma suatu bilangan pokok 10.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai dari logaritma berikut?

- a. $\log 1,91$
- b. $\log 2,69$

Jawab:

- a. $\log 1,91 = \dots$

Nilai $\log 1,91$ dapat langsung dilihat pada tabel logaritma, yaitu pada baris 1,9 kolom ke 1 sehingga diperoleh 0,2810.

Jadi, $\log 1,91 = 0,2810$.

Hasil dari logaritma 1,91 adalah

karakteristik
↑
0 , 2810
 ↓
 mantis

Karakteristiknya adalah 0 yang menyatakan bilangan yang dicari nilai logaritmanya terletak antara 1 dan 10. Mantisanya adalah 2810 yang menyatakan bagian desimal hasil logaritma suatu bilangan dengan basis 10.

- b. $\log 2,69 = \dots$

Nilai $\log 2,69$ dapat langsung dilihat pada tabel logaritma, yaitu pada baris 2,6 kolom ke 9, sehingga diperoleh 0,4298.

Jadi $\log 2,69 = 0,4298$.

Hasil dari logaritma 2,69 adalah

karakteristik
↑
0 , 4289
 ↓
 mantis

Karakteristiknya adalah 0 yang menyatakan bilangan yang dicari nilai logaritmanya terletak antara 1 dan 10. Mantisanya adalah 4298 yang menyatakan bagian desimal hasil logaritma suatu bilangan dengan basis 10.

LET'S DO IT

- Carilah informasi mengenai logaritma di perpustakaan atau di internet.
- Laporkan hasilnya di depan kelas.



b. Menentukan Nilai Logaritma dengan Kalkulator

Kalkulator yang mempunyai fasilitas logaritma dapat digunakan untuk menentukan nilai suatu logaritma dengan cepat dan tepat. Secara umum, cara menentukan nilai logaritma suatu bilangan dengan menggunakan kalkulator adalah sebagai berikut.

1. tekan tombol log.
2. tulis bilangan yang akan dicari nilai logaritmanya, kemudian
3. tekan tombol =.

Ketiga cara di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



TANYA & JAWAB

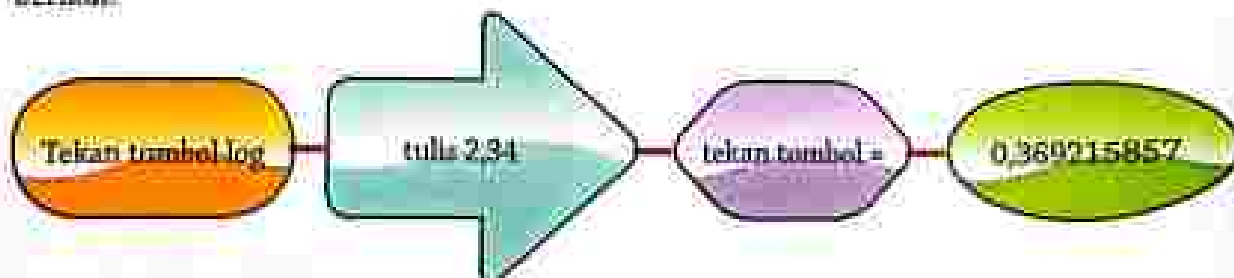
Tanya:

Berapakah nilai logaritma berikut?

- a. $\log 2,34$
- b. $\log 3,5$

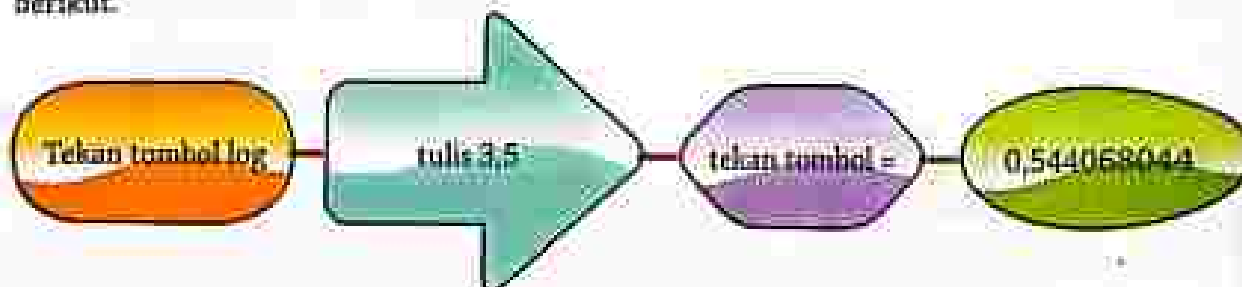
Jawab:

- a. Untuk menentukan nilai $\log 2,34$ dengan menggunakan kalkulator, caranya adalah sebagai berikut.



Jadi, $\log 2,34 = 0,369215857 \approx 0,369$.

- b. Untuk menentukan nilai $\log 3,5$ dengan menggunakan kalkulator, caranya adalah sebagai berikut.



Jadi, $\log 3,5 = 0,544068044 \approx 0,544$.

3. Menentukan Antilogaritma Suatu Bilangan

Antilogaritma adalah kebalikan dari logaritma. Artinya, kamu akan menentukan suatu bilangan atau numerus yang nilai logaritmanya diketahui. Pada bagian ini, akan dibahas bagaimana menentukan antilogaritma suatu bilangan dengan menggunakan tabel dan kalkulator.

a. Menentukan Antilogaritma Bilangan Antara 1 dan 10 dengan Menggunakan Tabel Logaritma

Untuk lebih dapat menentukan antilogaritma suatu bilangan, simaklah beberapa contoh berikut.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.2	0,3414	0,3444	0,3474	0,3502	0,3532	0,3561	0,3590	0,3619	0,3648	0,3676
2.3	0,3617	0,3646	0,3674	0,3702	0,3731	0,3759	0,3787	0,3815	0,3843	0,3871
2.4	0,3802	0,3830	0,3858	0,3886	0,3913	0,3941	0,3968	0,3996	0,4023	0,4051
2.5	0,3979	0,4007	0,4034	0,4061	0,4088	0,4115	0,4142	0,4169	0,4196	0,4223
2.6	0,4150	0,4177	0,4204	0,4231	0,4258	0,4285	0,4312	0,4339	0,4365	0,4392

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dapatkah kamu menentukan nilai x dengan menggunakan tabel logaritma?

- $\log x = 0,3874$
- $\log x = 0,4232$

Jawab:

- $\log x = 0,3874$

$\log x = 0,3874$ artinya $x = \text{antilog } 0,3874$.

Untuk menentukan nilai x , carilah 0,3874 pada tabel logaritma.

0,3874 terletak pada baris 2,4 kolom ke 4.

Jadi, $x = 0,3874$ atau antilog 0,3874 adalah 2,44.

- $\log x = 0,4232$

$\log x = 0,4232$ artinya $x = \text{antilog } 0,4232$.

Untuk menentukan nilai x , carilah 0,4232 pada tabel logaritma.

0,4232 terletak pada baris 2,6 kolom ke 5.

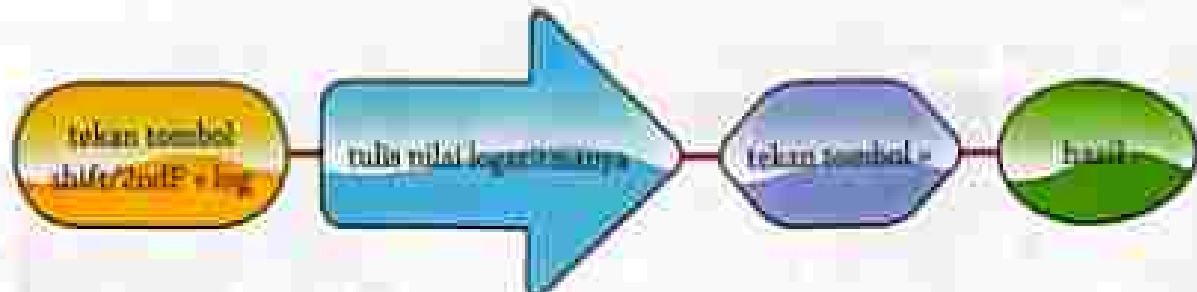
Jadi, $x = 0,4232$ atau antilog 0,4232 adalah 2,65.

b. Menentukan Antilogaritma dengan Kalkulator

Cara menentukan antilogaritma suatu bilangan dengan menggunakan kalkulator adalah sebagai berikut.

1. Tekan tombol shift atau 2ndF lalu tekan tombol log,
2. tulis nilai logaritma yang diketahui, kemudian
3. tekan tombol =.

Ketiga cara di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



TANYA & JAWAB

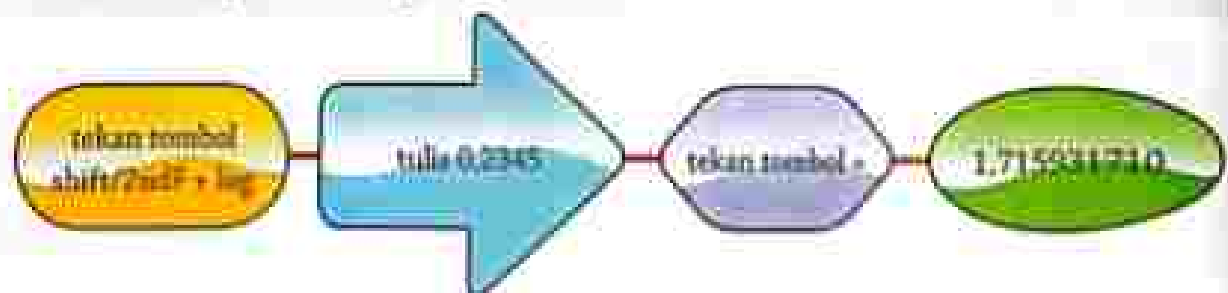
Tanya:

Dengan menggunakan kalkulator, dapatkah kamu menentukan bilangan yang nilai logaritmanya:

- a. 0,2345
- b. 0,53

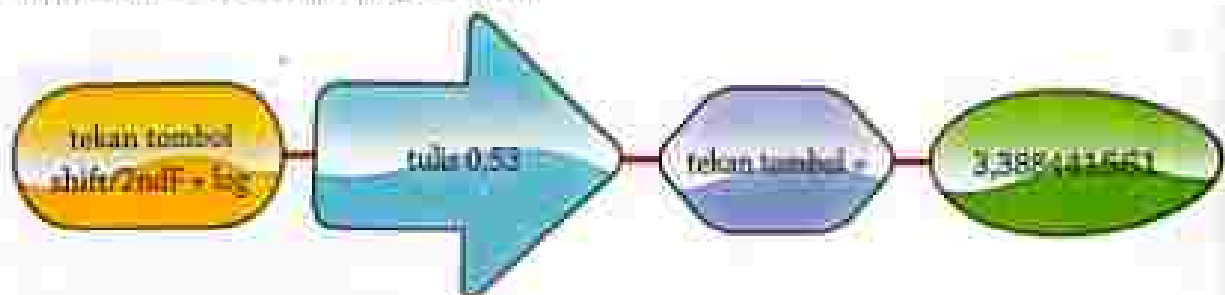
Jawab:

- a. Untuk menentukan bilangan yang nilai logaritmanya 0,2345 dengan menggunakan kalkulator, caranya adalah sebagai berikut.



Jadi, bilangan yang nilai logaritmanya 0,2345 adalah $1,715931710 \approx 1,716$.

- b. Untuk menentukan bilangan yang nilai logaritmanya 0,53 dengan menggunakan kalkulator, caranya adalah sebagai berikut.



Jadi, bilangan yang nilai logaritmanya 0,53 adalah $3,388441561 \approx 3,388$.

LOGARITMA DAN ANTILOGARITMA

1. Dengan menggunakan tabel logaritma, berapakah nilai dari:
a. $\log 1,27$
b. $\log 1,64$
c. $\log 1,34$
d. $\log 2,65$
e. $\log 2,76$
f. $\log 2,21$
2. Sekarang, dengan menggunakan kalkulator, berapakah nilai dari:
a. $\log 1,27$
b. $\log 1,64$
c. $\log 1,34$
d. $\log 2,65$
e. $\log 2,76$
f. $\log 2,21$
3. Dapatkah kamu menentukan nilai x berikut dengan menggunakan tabel logaritma?
a. $\log x = 0,4065$
b. $\log x = 0,6474$
c. $\log x = 0,6990$
d. $\log x = 0,4771$
e. $\log x = 0,4099$
f. $\log x = 0,5670$
4. Berapakah nilai logaritma bilangan-bilangan berikut?
a. 5,555
b. 6,748
c. 8,1264
d. 9,789
e. 4,576
f. 1,537

INFO MATEMATIKA

Logaritma sebagai salah satu materi yang dipelajari di dalam matematika, banyak digunakan dalam berbagai ilmu yang lain, di antaranya adalah sebagai berikut:

- Negatif dari logaritma berbasis 10 digunakan dalam ilmu kimia untuk mengekspresikan konsentrasi ion hidronium (pH). Contohnya, konsentrasi ion hidronium pada air adalah 10^{-7} pada suhu 25°C sehingga pH-nya 7.
- Satuan bel (dengan simbol B) adalah satuan pengukur perbandingan (rasio) seperti perbandingan nilai daya dan tegangan. Kebanyakan digunakan dalam bidang telekomunikasi, elektronik, dan akustik. Salah satu sebab digunakannya logaritma adalah karena telinga manusia mempersepsikan suara yang terdengar secara logaritmik. Satuan Bel dinamakan untuk mengenang jasa **Alexander Graham Bell**, seorang penemu di bidang telekomunikasi. Satuan desibel (dB), yang sama dengan 0,1 bel, lebih sering digunakan.
- Skala Richter mengukur intensitas gempa bumi dengan menggunakan skala logaritma berbasis 10.
- Dalam astronomi, magnitudo yang mengukur terangya bintang menggunakan skala logaritmik karena mata manusia mempersepsikan terang secara logaritmik.

4. Sifat-Sifat Logaritma

Logaritma memiliki beberapa sifat yang dapat diturunkan dari pengertian logaritma itu sendiri, yaitu sebagai berikut.

a. Perkalian Logaritma

$${}^a\log a = p \Leftrightarrow a^p = a \text{ dan } {}^a\log b = q \Leftrightarrow a^q = b$$

Kalikan a dan b , diperoleh

$$a \times b = a^p \times a^q$$

$$a \times b = a^{p+q}$$

(sesuai dengan sifat perpangkatan)

$${}^a\log (a \times b) = {}^a\log a^{p+q}$$

(kedua suku diberi ${}^a\log$)

$${}^a\log (a \times b) = \underset{{}^a\log}{p} + \underset{{}^a\log}{q}$$

(ingat bahwa ${}^a\log a = 1$)

Dari uraian di atas, diperoleh bahwa logaritma dari perkalian dua bilangan sama dengan jumlah logaritma dari masing-masing bilangan tersebut. Secara umum, ditulis

$${}^a\log (a \times b) = {}^a\log a + {}^a\log b$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dengan menggunakan sifat perkalian logaritma, berapakah nilai dari:

a. $\log 20 + \log 50$

b. ${}^2\log 24 + {}^2\log 6 + {}^2\log \frac{1}{9}$

Jawab:

a. $\log 20 + \log 50 = \log (20 \times 50)$

(sifat ${}^a\log (a \times b) = {}^a\log a + {}^a\log b$)

$$= \log 1.000$$

$$= {}^{10}\log 10^3 = 3$$

(ingat bahwa ${}^a\log a = 1$)

b. ${}^2\log 24 + {}^2\log 6 + {}^2\log \frac{1}{9} = {}^2\log \left(24 \times 6 \times \frac{1}{9} \right) = {}^2\log 16 = 4$

Tanya:

Berapakah nilai dari

a. $\log 40$

b. $\log 24$

jika diketahui $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$

Jawab:

a. $\log 40 = \log (2 \times 2 \times 10) = \log 2 + \log 2 + \log 10$

$$= 2 \log 2 + \log 10 = 2(0,3010) + 1 = 0,6020 + 1 = 1,6020$$

b. $\log 24 = \log (2 \times 2 \times 2 \times 3) = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 3$

$$= 3 \log 2 + \log 3 = 3(0,3010) + 0,4771 = 0,903 + 0,4771 = 1,3801$$

b. Pembagian Logaritma

Misalkan, ${}^p\log a = p \Leftrightarrow c^p = a$ dan ${}^p\log b = q \Leftrightarrow c^q = b$.

Bagilah a dengan b sehingga diperoleh

$$a : b = c^p : c^q$$

$$\Leftrightarrow a : b = c^{p-q} \quad (\text{sesuai dengan sifat perpangkatan})$$

$$\Leftrightarrow {}^p\log \left(\frac{a}{b} \right) = {}^p\log c^{p-q}$$

$$\Leftrightarrow {}^p\log \left(\frac{a}{b} \right) = \underset{{}^p\log a}{p} - \underset{{}^p\log b}{q}$$

Dari uraian di atas, dapat dilihat bahwa logaritma dari pembagian dua bilangan sama dengan selisih logaritma dari masing-masing bilangan tersebut. Secara matematis, ditulis

$${}^p\log \left(\frac{a}{b} \right) = {}^p\log a - {}^p\log b$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dengan menggunakan sifat pembagian logaritma, berapakah nilai dari:

a. $\log 250 - \log 25$

b. ${}^3\log 36 - {}^3\log 12$

Jawab:

a. $\log 250 - \log 25 = \log \left(\frac{250}{25} \right) = \log 10 = 1$

b. ${}^3\log 36 - {}^3\log 12 = {}^3\log \left(\frac{36}{12} \right) = {}^3\log 3 = 1$

Tanya:

Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$, berapakah nilai dari:

a. $\log \frac{3}{2}$

b. $\log \frac{2}{3}$

Jawab:

a. $\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010 = 0,1761$

b. $\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3 = 0,3010 - 0,4771 = -0,1761$

c. Logaritma Bilangan Berpangkat

Untuk memperoleh sifat logaritma bilangan berpangkat, perhatikan bentuk ${}^p\log a^n$.

$$\begin{aligned} {}^p\log a^n &= {}^p\log \underbrace{(a \times a \times a \times a \times \dots \times a)}_{n \text{ kali}} \\ &= \underbrace{{}^p\log a + {}^p\log a + {}^p\log a + {}^p\log a + \dots + {}^p\log a}_{n \text{ kali}} = n \times {}^p\log a \end{aligned}$$

Jadi, logaritma bilangan berpangkat sama dengan pangkat tersebut dikalikan dengan logaritma bilangan tersebut.

$${}^p\log a^n = n \times {}^p\log a$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$, dapatkan kamu menentukan nilai dari:

- a. $\log 32$ b. $\log 72$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \log 32 &= \log 2^5 \\ &= 5 \times \log 2 \\ &= 5 \times 0,3010 = 1,505 \\ \text{b. } \log 72 &= \log (8 \times 9) \\ &= \log 8 + \log 9 \\ &= \log 2^3 + \log 3^2 \\ &= 3 \log 2 + 2 \log 3 \\ &= 3(0,3010) + 2(0,4771) \\ &= 0,903 + 0,9542 = 1,8572 \end{aligned}$$

Tanya:

Berapakah nilai dari setiap bentuk berikut?

- a. $2 \log 0,3 - \log 225 + 2 \log 0,5 + 5$
b. $\frac{1}{2} \log 25 - \frac{1}{3} \log 64 + \frac{1}{4} \log 81 + \log \frac{8}{3}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } 2 \log 0,3 - \log 225 + 2 \log 0,5 + 5 &= \log (0,3)^2 - \log 225 + \log (0,5)^2 + 5 \\ &= \log \left(\frac{9}{100} \right) - \log 225 + \log \left(\frac{25}{100} \right) + 5 = \log \left(\frac{9}{100 \times 225} \times \frac{25}{100} \right) + 5 \\ &= \log \left(\frac{9}{90.000} \right) + 5 = \log \left(\frac{1}{10.000} \right) + 5 = \log (10^{-4}) + 5 = -4 + 5 = 1 \\ \text{b. } \frac{1}{2} \log 25 - \frac{1}{3} \log 64 + \frac{1}{4} \log 81 + \log \frac{8}{3} &= \log (25)^{\frac{1}{2}} - \log (64)^{\frac{1}{3}} + \log (81)^{\frac{1}{4}} + \log \frac{8}{3} \\ &= \log 5 - \log 4 + \log 3 + \log \frac{8}{3} = \log \left(\frac{5 \times 3}{4} \times \frac{8}{3} \right) = \log 10 = 1 \end{aligned}$$

d. Mengubah Basis Logaritma

Untuk mengubah basis suatu logaritma, perhatikan kembali pengertian logaritma suatu bilangan.

$${}^a\log b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b = {}^a\log a^c$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b = c \times {}^a\log a$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log a}$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log a}$$

Uraian tersebut memperjelas sifat logaritma yang lain, yaitu sebagai berikut.

$${}^a\log b = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log a}$$

Jika pada sifat di atas, variabel k diganti dengan b maka akan diperoleh

$${}^a\log b = \frac{{}^a\log b}{{}^a\log a} = \frac{1}{{}^a\log a}$$

$${}^a\log b = \frac{1}{{}^a\log a}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai dari:

a. ${}^2\log 6$

b. ${}^4\log 27$

jika diketahui $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$

Jawab:

a. ${}^2\log 6 = {}^2\log (2 \times 3)$

$$= {}^2\log 2 + {}^2\log 3$$

$$= 1 + \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$= 1 + \frac{0,4771}{0,3010}$$

$$= 1 + 1,5851 = 2,5851$$

b. ${}^4\log 27 = \frac{\log 27}{\log 4}$

$$= \frac{3 \times \log 3}{2 \times \log 2}$$

$$= \frac{3(0,4771)}{2(0,3010)} = \frac{1,4313}{0,6020} = 2,3776$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai dari $\log 25 = \frac{1}{{}^{10}\log 10} + \frac{1}{{}^2\log 10}$?

Jawab:

$$\begin{aligned}\log 25 &= \frac{1}{{}^{10}\log 10} + \frac{1}{{}^2\log 10} = \log 25 = \log 20 + \log 8 \\ &= \log \left(\frac{25 \times 8}{20} \right) \\ &= \log 10 = 1\end{aligned}$$

Tanya:

Jika ${}^2\log 3 = m$ dan ${}^2\log 5 = n$, bagaimanakah menyatakan nilai ${}^{10}\log 20$ dalam m dan n ?

Jawab:

Jika ${}^2\log 5$ dikalikan dengan ${}^2\log 3$ maka

$${}^2\log 5 \times {}^2\log 3 = mn$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log 5}{\log 2} \times \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{\log 3}{\log 2} = {}^2\log 3 = mn$$

$${}^{10}\log 20 = {}^{10}\log 4 + {}^{10}\log 5$$

$$= 2({}^{10}\log 2) + {}^{10}\log 5$$

$$= 2\left(\frac{1}{{}^2\log 15}\right) + \frac{1}{{}^2\log 15}$$

$$= 2\left(\frac{1}{{}^2\log 3 + {}^2\log 5}\right) + \frac{1}{{}^2\log 5 + {}^2\log 3}$$

$$= \frac{2}{mn + n} + \frac{1}{1 + m} = \frac{2 + n}{n(1 + m)}$$

INFO MATEMATIKA

www.soalmatematika.com

Situs ini berisi soal-soal matematika mulai dari jenjang SD, SMP, dan SMA. Kamu dapat mengunduhinya dengan cuma-cuma dan menjadikannya sebagai soal latihan di rumah. Selain itu, di situs ini juga terdapat berbagai informasi mengenai dunia matematika.

Dari sifat-sifat logaritma yang telah dibahas sebelumnya, akan diperoleh beberapa sifat yang lain, yaitu sebagai berikut.

(1) ${}^b\log a \times {}^b\log c = {}^b\log c$

Bukti: ${}^b\log a \times {}^b\log c = \frac{\log a}{\log b} \times \frac{\log c}{\log a} = \frac{\log a}{\log a} \times \frac{\log c}{\log b} = {}^b\log c$

Jadi, terbukti bahwa

$${}^b\log a \times {}^b\log c = {}^b\log c$$

(2) ${}^a\log b^p = {}^a\log b$

Bukti: ${}^a\log b^p = \frac{\log b^p}{\log a} = \frac{p \log b}{p \log a} = \frac{p}{p} \cdot \log b$

$${}^a\log b^p = \frac{p}{p} \cdot \log b$$

Jika $p = q$ maka

$${}^a\log b^p = {}^a\log b$$

(3) $c^{{}^c\log a} = a$

Bukti: ${}^c\log a = p \Leftrightarrow c^p = a$
 $\Leftrightarrow c^{{}^c\log a} = a$

Jadi, terbukti bahwa

$$c^{{}^c\log a} = a$$

Untuk lebih memahami sifat-sifat di atas, perhatikan beberapa contoh berikut.

a. $2^{{}^2\log 5} = 5$

b. $27^{{}^3\log 7} = (3^3)^{{}^3\log 7} = 7^3 = 343$

c. $(\sqrt{3})^{{}^{\log 625}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{{}^{\log 625}} = 625^{\frac{1}{2}} = 5$

d. $9^{{}^3\log 3} + 4^{{}^2\log 2} - \frac{5^{{}^5\log 5}}{3^{{}^3\log 3}} = (3^2)^{{}^3\log 3} + (2^2)^{{}^2\log 2} - \frac{5}{2} = 2^2 + 3^2 - 3 = 4 + 9 - 3 = 10$

e. ${}^2\log \sqrt{243} \times {}^3\log 4 + {}^2\log \frac{1}{4} = {}^2\log 3^{\frac{5}{2}} \times {}^3\log 4 - 2$
 $= \frac{5}{2} \times {}^3\log 4 - 2$
 $= \frac{5}{2} (2) - 2 = 3$

ASAHI OTAK

SIFAT-SIFAT LOGARITMA

1. Tentukan nilai setiap bentuk berikut.

a. $3^{\log 3}$

c. $3^{\log 3} - 6^{\log 3}$

e. $\frac{p^{\log 3} \cdot q^{\log 3}}{r^{\log \left(\frac{1}{3}\right)}}$

b. $3^{\log 3}$

d. $3^{\log 3} \cdot 6^{\log 3}$

f. $p^{\log 3} : q^{\log 3} : r^{\log 3}$

2. Tentukan nilai setiap bentuk berikut.

a. ${}^3\log 2 + {}^3\log 8$

f. ${}^3\log 16 + {}^3\log 27 + {}^3\log \frac{1}{25}$

b. ${}^3\log 162 - {}^3\log 2$

g. ${}^3\log 9 + {}^3\log \frac{1}{125} - \log 0,001$

c. ${}^3\log 64 + {}^3\log 125 - {}^3\log 36$

h. ${}^3\log 20 + {}^3\log 50 - {}^3\log 8$

d. $\log 250 + \log 8 - \log 20$

i. $\log 25 + \log 6 - \log 15$

e. $\log 50 - (\log 15 - \log 3)$

j. ${}^2\log 5 + {}^2\log 8 - {}^2\log 10$

3. Tentukan nilai setiap bentuk berikut.

a. $\frac{2 \cdot {}^2\log \left(\frac{1}{9}\right) + {}^3\log 2}{{}^3\log 2 \cdot {}^3\log 3 \cdot {}^2\log 5}$

c. $({}^3\log 10)({}^3\log 10) - ({}^3\log 5 + {}^3\log 2)$

b. $({}^3\log 9 + {}^3\log 3)({}^3\log 2 + {}^3\log 4)$

d. $({}^3\log \sqrt[3]{125})({}^3\log 27) + {}^3\log 32$

4. Sederhanakan setiap bentuk berikut.

a. $\frac{\log 49}{\log 7}$

c. $\frac{{}^3\log \frac{3}{q}}{{}^3\log q^3}$

e. ${}^3\log \frac{1}{a} \cdot {}^3\log q$

b. $\frac{{}^3\log 8}{{}^3\log 2}$

d. $\frac{1}{{}^3\log 5} - \frac{1}{{}^3\log 5}$

f. ${}^3\log 7 \cdot {}^3\log 49$

5. Diketahui $\log 2 = 0,3010$, $\log 3 = 0,4771$, $\log 5 = 0,6990$ dan $\log 7 = 0,8451$. Hitunglah tiap logaritma berikut (teliti sampai 4 desimal).

a. $\log 105$

c. $\log 2,4$

e. $\log \sqrt[3]{72}$

b. $\log 108$

d. $\log 0,0081$

f. $\log \sqrt[3]{2}$

5. Penggunaan Logaritma dalam Perhitungan

a. Mengalikan dan Membagi Bilangan

Sifat perkalian dan pembagian logaritma dapat digunakan untuk mengalikan dan membagi bilangan. Untuk lebih jelasnya, pelajari contoh-contoh soal berikut.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dengan menggunakan logaritma, berapakah nilai dari:

- a. $3,81 \times 43,4$ b. $73,42 \times 0,00462 \times 0,5143$

Jawab:

- a. Misalkan, $p = 3,81 \times 43,4$ sehingga

$$\begin{aligned}\log p &= \log (3,81 \times 43,4) \\ &= \log 3,81 + \log 43,4 \\ &= 0,5809 + 1,6365 \quad (\text{teliti sampai 4 desimal}) \\ &= 2,2174 \\ &= 0,2174 + 2 \\ &= \log 1,6497 + \log 10^2 \quad (\text{antilog } 0,2174 = 1,6497) \\ &= \log (1,6497 \times 10^2) \\ &= \log 164,97\end{aligned}$$

Jadi, $p = 164,97$.

Perhitungan di samping dapat juga disajikan dalam bentuk tabel, yaitu sebagai berikut.

Bilangan	Logaritma
3,81	0,5809
43,4	1,6365
<u>164,97</u>	<u>2,2174</u>

$$\begin{aligned}\log p &= \log (73,42 \times 0,00462 \times 0,5143) \\ &= \log 73,42 + \log 0,00462 + \log 0,5143 \\ &= 1,8658 + 0,6645 - 3 + 0,7112 - 1 \quad (\text{teliti sampai 4 desimal}) \\ &= -0,7585 \\ &= 0,2415 - 1 \\ &= \log 1,7438 + \log 10^{-1} \quad (\text{antilog } 0,2415 = 1,7438) \\ &= \log (1,7438 \times 10^{-1}) \\ &= \log 0,1744\end{aligned}$$

Jadi, $p = 0,1744$.

Perhitungan di atas dapat juga disajikan dalam bentuk tabel, yaitu sebagai berikut.

Bilangan	Logaritma
73,42	1,8658
0,00462	0,6645 - 3
0,5143	0,7112 - 1
<u>0,1744</u>	<u>-0,758 + 0,2415 - 1</u>

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dengan menggunakan logaritma, berapakah hasil $57,8 : 0,524$?

Jawab:

Misalkan, $p = 57,8 : 0,524$ sehingga

$$\begin{aligned}\log p &= \log (57,8 : 0,524) \\ &= \log 57,8 - \log 0,524 \\ &= 1,7619 - (0,7193 - 1) \quad (\text{teliti sampai 4 desimal}) \\ &= 2,0426 \\ &= 0,0426 + 2 \\ &= \log 1,1031 + \log 10^2 \quad (\text{antilog } 0,0426 = 1,1031) \\ &= \log (1,1031 \times 10^2) \\ &= \log 110,31\end{aligned}$$

Jadi, $p = 110,31$.

Perhitungan di samping dapat juga disajikan dalam bentuk tabel, yaitu sebagai berikut.

Bilangan	Logaritma
57,8	→ 1,7619
0,524	→ 0,7193 - 1
<u>110,31</u>	← 2,0426

Tanya:

Berapakah hasil pembagian berikut dengan menggunakan logaritma?

a. $\frac{784,6 \times 0,0431}{28,23}$

b. $\frac{0,4932 \times 653,7}{0,07213 \times 8456}$

Jawab:

a. Misalkan, $p = \frac{784,6 \times 0,0431}{28,23}$ sehingga

$$\begin{aligned}\log p &= \log \left(\frac{784,6 \times 0,0431}{28,23} \right) \\ &= \log 784,6 + \log 0,0431 - \log 28,23 \\ &= 2,8946 + 0,6345 - 2 - 1,4507 \\ &= 0,0784 \quad (\text{antilog } 0,0784 = 1,198) \\ &= \log 1,198\end{aligned}$$

Jadi, $p = 1,198$.

b. Misalkan, $p = \frac{0,4932 \times 653,7}{0,07213 \times 8456}$ sehingga

$$\begin{aligned}\log p &= \log \left(\frac{0,4932 \times 653,7}{0,07213 \times 8456} \right) \\ &= \log 0,4932 + \log 653,7 - (\log 0,07213 + \log 8456) \\ &= 0,6930 - 1 + 2,8154 - (0,8581 - 2 + 3,9272) \\ &= -0,2769 = 0,7231 - 1 \\ &= \log 5,2845 + \log 10^{-1} \quad (\text{antilog } 0,7231 = 5,2845) \\ &= \log (5,2845 \times 10^{-1}) \\ &= \log 0,5285\end{aligned}$$

Jadi $p = 0,5285$.

Perhitungan di samping dapat juga disajikan dalam bentuk tabel, yaitu sebagai berikut.

Bilangan	Logaritma
784,6	→ 2,8946
0,0431	→ 0,6345 - 2
<u>28,23</u>	→ 1,4507
<u>110,31</u>	← 0,0784

Perhitungan di samping dapat juga disajikan dalam bentuk tabel, yaitu sebagai berikut.

Bilangan	Logaritma
0,4932	→ 0,6930 - 1
653,7	→ 2,8154
<u>0,07213</u>	→ 0,8581 - 2
<u>8456</u>	→ 3,9272
<u>0,5285</u>	← 0,7231 - 1

b. Perpangkatan dan Penarikan Akar Bilangan

Kamu juga dapat menggunakan sifat perpangkatan pada logaritma untuk menentukan pangkat dan menarik akar suatu bilangan. Agar kamu lebih memahaminya, perhatikan contoh-contoh soal berikut.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dengan menggunakan logaritma, berapakah nilai dari:

a. $(7,284)^5$

b. $\sqrt[5]{0,8532}$

Jawab:

a. $(7,284)^5$

Misalkan, $p = (7,284)^5$ sehingga

$$\log p = \log (7,284)^5$$

$$= 5 \log (7,284)$$

$$= 5 (0,8624)$$

$$= 4,312$$

$$= \log 20.511,62$$

$$\text{Jadi } (7,284)^5 = 20.511,62.$$

b. $\sqrt[5]{0,8532}$

Misalkan, $p = \sqrt[5]{0,8532}$ sehingga

$$\log p = \log \sqrt[5]{0,8532}$$

$$= \frac{1}{5} \log (0,8532)$$

$$= \frac{1}{5} (0,9311 - 1)$$

$$= -0,01378$$

$$= 0,98622 - 1$$

$$= \log (9,6877 \times 10^{-1})$$

$$= \log 0,969$$

$$\text{Jadi, } \sqrt[5]{0,8532} = 0,969.$$

Tanya:

Berapakah nilai dari $\frac{(78,41)^3 \sqrt{142,3}}{\sqrt[4]{0,1562}}$ jika dihitung menggunakan logaritma?

Jawab:

Misalkan, $p = \frac{(78,41)^3 \sqrt{142,3}}{\sqrt[4]{0,1562}}$ sehingga

$$\log p = \log \left[\frac{(78,41)^3 \sqrt{142,3}}{\sqrt[4]{0,1562}} \right]$$

$$= \log (78,41)^3 + \log (142,3)^{\frac{1}{2}} - \log (0,1562)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 3 \log 78,41 + \frac{1}{2} \log 142,3 - \frac{1}{4} \log 0,1562$$

$$= 3 (1,8944) + \frac{1}{2} (2,1523) - \frac{1}{4} (0,1937 - 1)$$

$$= 5,6832 + 1,0762 + 0,2016$$

$$= 6,961$$

$$= \log 9.141.132,42$$

$$\text{Jadi, } \frac{(78,41)^3 \sqrt{142,3}}{\sqrt[4]{0,1562}} = 9.141.132,42.$$



MATH AROUND US

Periode T bandul sederhana yang panjangnya l diberikan dengan rumus $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ dengan g merupakan percepatan yang disebabkan oleh gravitasi. Periode bandul T (dalam detik) jika $l = 281,3$ cm, $\pi = 3,142$, dan $g = 981,0$ cm/det² adalah sebagai berikut.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2(3,142)\sqrt{\frac{281,3}{981,0}} = 6,284\left(\frac{281,3}{981,0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log T = \log 6,284\left(\frac{281,3}{981,0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log 6,284 + \frac{1}{2}(\log 281,3 - \log 981)$$

$$= 0,7982 + \frac{1}{2}(2,4492 - 2,9917)$$

$$= 0,7982 - 0,2713$$

$$= 0,5269$$

$$= \log 3,36$$

Jadi, $T = 3,36$ detik.



Sumber: www.studioblibli.com

ASAHA OTAK

PENGUNAAN LOGARITMA DALAM PERHITUNGAN

1. Selesaikan perhitungan berikut dengan menggunakan logaritma.

a. $46,5 \times 3,6$

c. $0,236 \times 0,042$

e. $193 : 1,09$

b. $6,24 \div 0,153$

d. $93,82 \times 16,74 \times 0,0371$

f. $0,216 : 1,47$

2. Selesaikan soal-soal berikut dengan menggunakan logaritma.

a. $(5,476)^2$

c. 2^{10}

e. $\sqrt[3]{872}$

b. $(1,5)^{10}$

d. $(0,2121)^{-2}$

f. $\sqrt[3]{0,052}$

3. Selesaikan soal-soal berikut dengan menggunakan logaritma.

a. $\frac{5.608}{(0,4536)(11.000)}$

c. $(0,003)^4 \times \frac{(2.000)^2}{(0,1)^{-2}}$

e. $\frac{4.230}{(3,142 \times 28)}$

b. $\sqrt{\frac{(1.600)(310,6)^2}{7.290}}$

d. $\frac{14^{-2} \times 70^4}{35^4 \times 7^{-3}}$

f. $\frac{(0,015 \times \sqrt[3]{0,19})}{20}$



LET'S ACT

Dalam kehidupan sehari-hari, sebenarnya kita sering dihadapkan pada suatu permasalahan yang secara tidak sadar berhubungan dengan bentuk pangkat, akar, dan logaritma. Berikut disajikan beberapa permasalahan yang berkaitan dengan pokok bahasan yang telah kamu pelajari. Kerjakanlah bersama kelompok belajarmu.

Petunjuk:

1. Buatlah 5 kelompok yang terdiri atas 4-6 orang.
2. Setiap anggota kelompok menyelesaikan setiap permasalahan berikut (± 20 menit).
3. Diskusikan penyelesaian yang diperoleh setiap anggota kelompok (± 20 menit).
4. Setiap kelompok mempresentasikan penyelesaian satu permasalahan, misalnya kelompok 1 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 1, kelompok 2 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 2, dan seterusnya. Jika kelompok lain memiliki langkah penyelesaian yang berbeda untuk permasalahan yang sama maka kelompok tersebut juga mempresentasikan penyelesaiannya tersebut (± 40 menit).

Permasalahan 1:

Luas Gurun Sahara adalah sekitar 8,5 juta mil persegi. Jika ada sekitar $3,33 \times 10^6 \text{ m}^2$ dalam satu mil persegi, tentukan luas Gurun Sahara tersebut dalam meter persegi dan nyatakan hasilnya dalam notasi ilmiah.



Sumber: www.myspace.com/mahdita1990



Sumber: healthystart.org/usa/af

Permasalahan 2:

Di suatu waktu, terdapat sekitar 1×10^{15} sel darah merah pada hati seorang manusia. Jika terdapat 5×10^6 sel darah merah dalam 1 millimeter darah, berapa millimeter darah yang terdapat dalam hati manusia?

Permasalahan 3:

Semburan lumpur panas di Porong, Sidoarjo pada 29 Mei 2000 sampai saat ini belum dapat dihentikan. Semburan tersebut mengeluarkan lumpur panas sekitar $1,25 \times 10^6 \text{ m}^3$ per hari. Jika sampai tanggal 22 Maret 2007 pusat kebocoran belum dapat ditutup, berapa banyak lumpur panas yang dikeluarkan? (Asumsikan 1 bulan = 30 hari).



Sumber: Hidayat, 2007



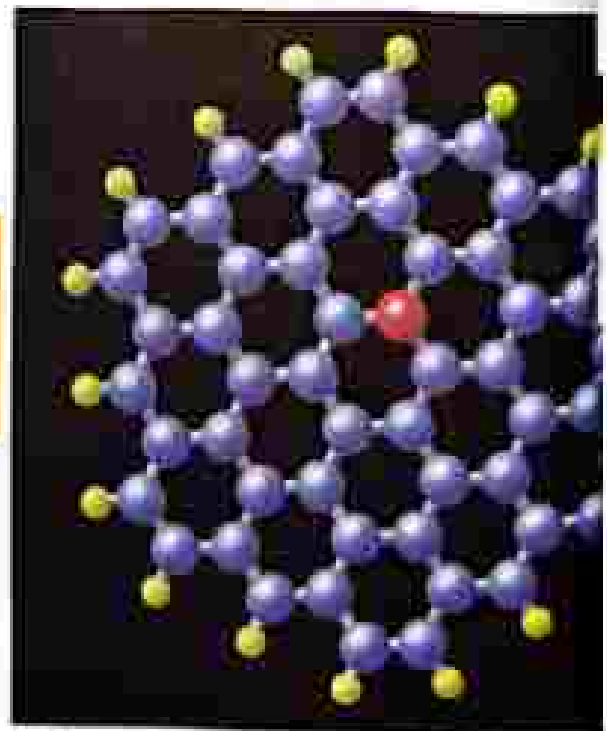
Sumber: www.elfaria.co.id

Permasalahan 4:

Taludaki kalian, bahwa kuku yang kalian miliki tumbuh sekitar $1,21 \times 10^{-2} \text{ cm}$ per hari? Tentukan panjang kuku kalian jika dibiarkan tumbuh dalam waktu 17 tahun dengan asumsi lamanya 1 bulan sama dengan 30 hari?

Permasalahan 5:

Jika massa dari 6×10^7 atom hidrogen adalah $1,002 \times 10^{-23} \text{ kg}$, berapa massa setiap atom hidrogen tersebut?



Sumber: www.ck12.org

1. Jika a adalah bilangan riil dan n adalah bilangan bulat positif maka berlaku

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a \times a \times a}_n$$

2. Jika $a, b \in \mathbb{R}$ di mana p, q , dan n bilangan bulat maka berlaku

- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $a^p : a^q = a^{p-q}, a \neq 0$
- $(a^p)^q = a^{p \times q}$
- $a^{-p} = \frac{1}{a^p}, a \neq 0$
- $(a \times b)^p = a^p \times b^p$
- $(a^p \times b^q)^n = a^{p \times n} \times b^{q \times n}$
- $a^0 = 1$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ dan $\frac{a^n}{b^n}$, dengan syarat $b \neq 0$

3. Bentuk akar adalah akar dari suatu bilangan rasional yang hasil akarnya adalah bilangan irasional.

4. Operasi Aljabar pada Bentuk Akar

- Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar
 $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$ dan $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c}$
- Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar
 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ dan $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ dengan syarat $b \neq 0$

5. Merasionalkan Bentuk Akar

- $\sqrt{(p + q) + 2\sqrt{pq}} = \sqrt{p} + \sqrt{q}$
- $\sqrt{(p + q) - 2\sqrt{pq}} = \sqrt{p} - \sqrt{q}$, dengan syarat $p > q$

6. Merasionalkan Penyebut

- Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

- Bentuk $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ dan $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

dan

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}} \times \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$$

- Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ dan $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

dan

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

7. Persamaan Eksponen Sederhana

- Jika $a^{f(x)} = a^b$ maka $f(x) = b$
- Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ maka $f(x) = g(x)$

8. Logaritma merupakan kebalikan (invers) dari eksponen (perpangkatan) sehingga perpangkatan dapat dinyatakan dengan logaritma atau sebaliknya.

Jika $a^c = b \Leftrightarrow {}^a\log b = c$, dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$

9. Untuk menentukan logaritma suatu bilangan dapat menggunakan beberapa metode, dengan bantuan grafik, tabel, dan kalkulator.

10. Sifat-Sifat Logaritma

- ${}^a\log (a \times b) = {}^a\log a + {}^a\log b$
- ${}^a\log \left(\frac{a}{b}\right) = {}^a\log a - {}^a\log b$
- ${}^a\log a^n = n \times {}^a\log a$
- ${}^a\log b = \frac{{}^b\log b}{{}^b\log a}$
- ${}^a\log a \times {}^a\log c = {}^a\log c$
- ${}^a\log b^p = \frac{p}{p} \cdot {}^a\log b$
- ${}^a\log b^p = {}^a\log b$
- ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$

Ujilah pemahamanmu dengan mengerjakan Kuis 1 di halaman 321.

Mukadimah

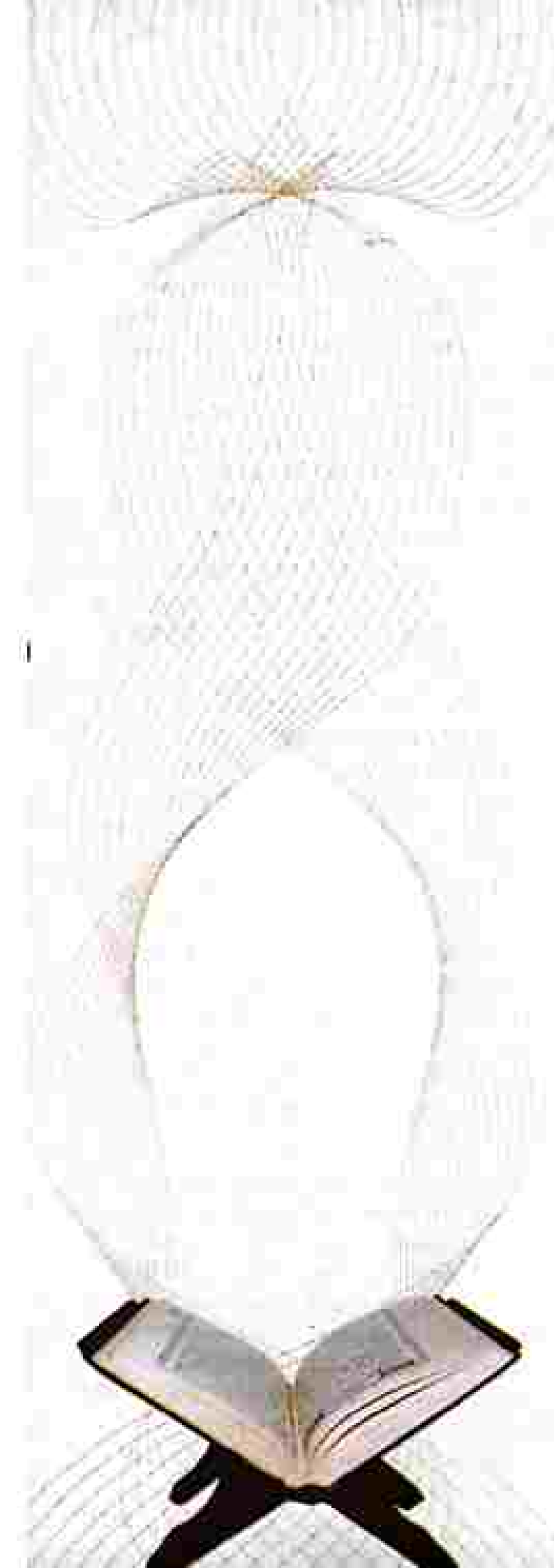
Pada dasarnya, jika dilihat dari fungsi dan asal-usul kelahirannya, semua manusia adalah sama. Fungsi setiap manusia, sebagaimana yang disampaikan oleh Sang Pencipta, adalah sebagai khalifah Allah (*vicegerent*) di muka bumi. Hal ini dapat dilihat di dalam Alquran surat Al-Baqarah ayat 30, "Sesungguhnya Aku akan menjadikan khalifah di muka bumi [*Innii jaa'ilun li al-Ardh khalifah*]*. Adapun asal semua manusia adalah dari yang satu, sebagaimana yang termuat dalam surat An-Nisa ayat 1, "Wahai manusia, bertakwalah kepada Tuhan kalian, yang telah menciptakan kalian dari jiwa (*nafs*) yang satu [*Ya ayyuha an-naas ittaquu rabbukum al-ladzii khalaqakum min nafs waahidah*]*. Sekarang, apakah tujuan keberadaaan manusia? Jawabannya adalah untuk mengenal (*ma'rifah*) Allah, seperti yang tercantum di dalam sebuah hadist qudsi yang masyhur, "Aku adalah pusaka yang tersimpan, maka Kuciptakan makhluk, agar mereka mengenali-Ku [*Kuntu kanzan makhliyyan, fa khalaqtu al-Khalqa, li ya'rifuni*]*. Seorang manusia dapat mengenal Allah hanya melalui ibadah, sebagaimana firman-Nya dalam surat Adz-Dzariyat ayat 56, "Dan tidaklah Aku menciptakan jin dan manusia, melainkan untuk beribadah [*Wa maa khalaqtu al-jinn wa al-ins illa li ya'buduni*]*."

Dengan demikian, tidak ada satu faktor apa pun yang melebihi satu orang manusia dari lainnya, baik yang berlatar gender, kondisi finansial, status sosial, maupun kondisi-kondisi lainnya. Oleh karena itu, tidak salah jika Rasulullah menyampaikan bahwa tidak ada keunggulan orang Arab dari masyarakat non-Arab ('Ajam) jika didasarkan atas klaim sejarah dan juga silsilah.

Meskipun demikian, sebagaimana pepatah Arab yang menyatakan bahwa bagi segala sesuatu, niscaya ada pengecualiannya [*li kulli sya'in istitsna'*], maka tetap saja ada sebuah pembeda yang bisa dijadikan sebagai tolok ukur bagi penentu derajat dan harkat manusia yang satu dari yang lainnya. Hal ini dinyatakan oleh Allah Swt dengan jelas di dalam firman-Nya, yaitu pada surat Al-Hujarat ayat 13, "Sesungguhnya orang yang paling mulia di sisi Allah adalah orang yang bertakwa di antara kalian. [*Inna akramakum 'inda Allah atqaakum*]."

Makna yang tersurat jelas dari ayat di atas adalah faktor terpenting yang menentukan tingkat kemuliaan seorang manusia di hadapan Allah, sang Pencipta, adalah ketakwaan. Semakin tinggi tingkat ketakwaan seseorang maka kemuliaan dan kedekatannya (*al-qurb*) dengan Allah pun akan semakin luhur. Sebaliknya, semakin rendah kadar ketakwaan seseorang, maka ia akan semakin jauh dari Allah. Selain itu, kemuliaan diri di hadapan Allah pun tidak akan bisa ia harapkan. Walaupun menurut pandangan manusia di dunia, ia merupakan pribadi yang mempunyai pangkat dan jabatan yang tinggi.

Faktor inilah yang menjadi pembeda antara satu individu dengan individu yang lainnya, sekaligus juga menjadi "bekal wajib" yang harus dipersiapkan oleh setiap manusia dalam menjalani kehidupan. Hal ini sebagaimana yang dinyatakan oleh Allah Swt. dalam surat Al-Baqarah ayat 197, "Bersiap-siaplah kalian dengan menyediakan bekal, dan sebaik-baiknya bekal adalah ketakwaan [*tazawwadu fa inna khayr az-zaad at-taqwa*]."



Ketakwaan yang dimaksud merupakan buah dari kepercayaan yang tinggi dan kepatuhan yang mendalam, yang terwujud dalam aktivitas, "Melaksanakan segala perintah Allah dan menjauhi segala larangan-Nya [*imtitas awamir Allah wa ijtinab nawahih*]. Inilah model ketakwaan yang diharapkan agama. Ketakwaan yang bisa menggabungkan kesalahan pribadi dengan kesalahan sosial. Ketakwaan yang menghimpun antara media duniawi dengan tujuan ukhrawi. Ketakwaan yang mencerminkan keluhuran nilai spiritualitas dengan kesehatan jasmani. Itulah ketakwaan yang sempurna. Dan orang-orang yang semacam inilah yang akan mendapatkan keridhaan dan kecintaan dari Allah Swt., sebagaimana yang termuat dalam Alquran surat Al-Baqarah ayat 194; surat At-Taubah ayat 4, 7, 36 dan 123; serta Ali Imran ayat 76.

Agar dapat mencapai ketakwaan seperti ini, dibutuhkan banyak upaya maksimal oleh setiap individu guna mendapatkan hasil yang diinginkan. Misalnya, hal pertama yang harus kita lakukan adalah bersegera memohon maaf dan ampunan kepada Allah Swt. atas segala kekhilafan dan kekeliruan yang telah dilakukan, seperti yang tertuliskan dalam Alquran surat Ali Imran ayat 114 dan 133; serta Al-Mukminun ayat 61.

Selain itu, yang juga harus dilakukan adalah menyucikan diri kita dan harta benda yang dimiliki, apa pun itu, dengan senantiasa menyebut segala kenikmatan yang diberikan Allah. Kemudian, terus-menerus bersyukur atas segala anugerah-Nya, yang lantas dilanjutkan dengan ketundukan yang total, laiknya pribadi yang terus menerus berada dalam shalat, seperti yang ada dalam Alquran surat al-A'la ayat 14.

Wallahu a'lam bi ash-Shawwab



2

Source: www.nat.go

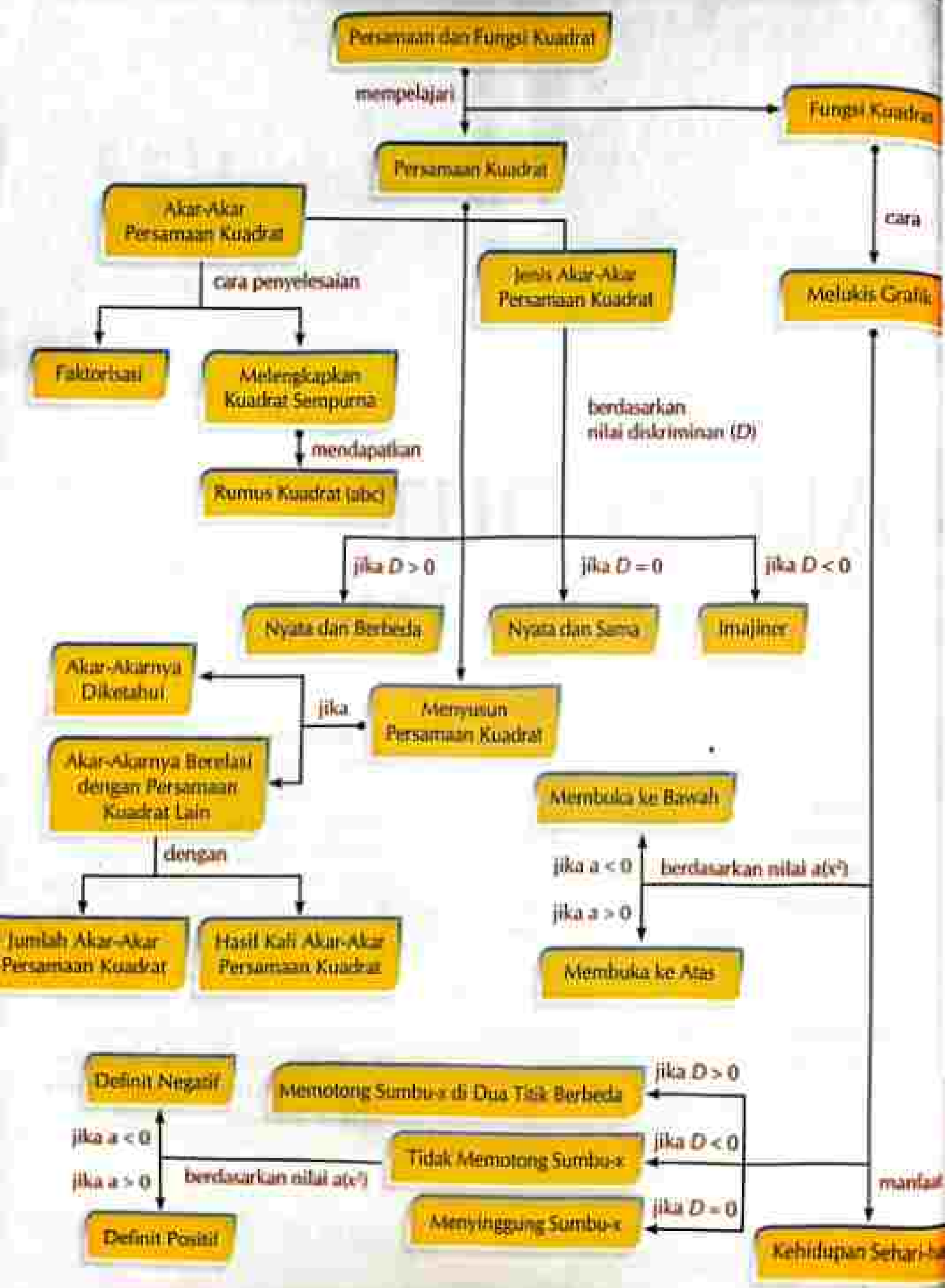
ALL ABOUT "KUADRAT"

Manfaat:

Kamu dapat menyelesaikan persoalan yang berhubungan dengan persamaan dan fungsi kuadrat. Selain itu, kamu dapat melihat manfaat matematika di dalam kehidupan sehari-hari.

Kata kunci: Persamaan kuadrat, diskriminan, grafik fungsi kuadrat, dan nilai ekstrim

Air terjun Sipiso-piso yang terletak di dekat Danau Toba selalu mencurahkan airnya melewati jurang hingga ke dasar sungai. Misalkan, tinggi air terjun yang jatuh dari atas tebing sampai dasar sungai adalah h meter dan waktu yang diperlukan air untuk sampai ke dasar sungai adalah t menit. Jika tinggi air terjun pada saat t menit dinyatakan dengan persamaan $h = 125 + 2t - 5t^2$, dapatkan kamu menentukan tinggi air terjun pada saat $t = 2$ menit?



A. Persamaan Kuadrat

1. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Ketika SMP, kamu sudah mengenal persamaan kuadrat. Coba kamu ingat kembali materi tersebut. Persamaan kuadrat merupakan persamaan yang memuat variabel dengan pangkat tertinggi 2. Bentuk umum persamaan kuadrat dalam x adalah

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan a , b , dan c anggota bilangan riil dan $a \neq 0$.

Keterangan: a disebut koefisien x^2

b disebut koefisien x

c disebut konstanta atau tetapan

Agar kamu lebih memahaminya, perhatikan beberapa persamaan kuadrat berikut.

- $3x^2 - 4x - 2 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan $a = 3$, $b = -4$, dan $c = -2$
- $x^2 - 4 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan $a = 1$, $b = 0$, dan $c = -4$
- $3x^2 - 3x = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan $a = 3$, $b = -3$, dan $c = 0$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah menyatakan bentuk-bentuk berikut dalam bentuk umum persamaan kuadrat?

- $x - \frac{3}{x} + 2 = 0$
- $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 2$

Jawab:

a. $x - \frac{3}{x} + 2 = 0$

$$x - \frac{3}{x} + 2 = 0$$

(kalikan semua ruas dengan x)

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Jadi, $x^2 + 2x - 3 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan $a = 1$, $b = 2$, dan $c = -3$.

b. $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 2$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 2$$

(samakan penyebutnya)

$$\frac{x(x-3) + 1(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 2$$

$$x(x-3) + 1(x-2) = 2(x-2)(x-3) \quad (\text{dikali silang})$$

$$x^2 - 3x + x - 2 = 2(x^2 - 5x + 6)$$

$$x^2 - 7x + 14 = 0$$

Jadi, $x^2 - 7x + 14 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan $a = 1$, $b = -7$, dan $c = 14$.

ASAHI OTAK

BENTUK UMUM PERSAMAAN KUADRAT

Apakah setiap persamaan berikut termasuk persamaan kuadrat?

Jika ya, tentukan koefisien-koefisiennya.

a. $5 + 3x + 6x$

b. $3x^2 - 2 + 4x$

c. $\frac{6}{x} + 5(x^2 + 4x - 8)$

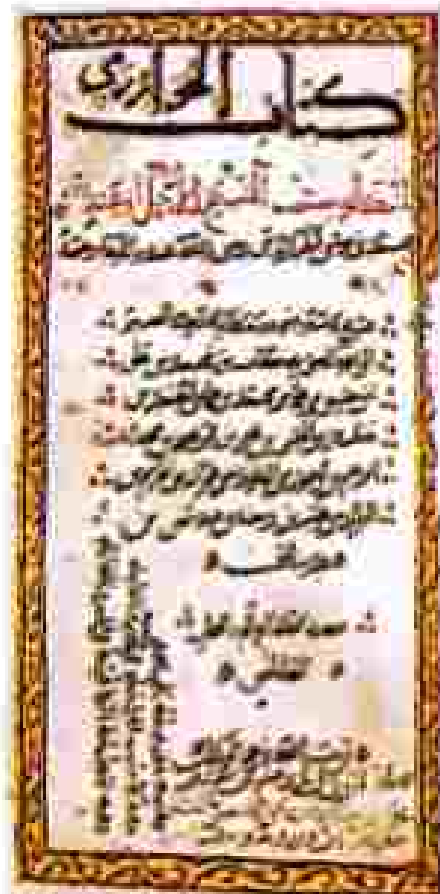
d. $-6(x - 4) - 2(x - 4)^2 = 0$

e. $\frac{2x^2 - 1}{x - 3} = x + 3 + \frac{17}{x - 3}$

f. $\frac{1}{8 - x} = \frac{3x^2}{2x + 3}$



AMAZING PERSON



AL-KHAWARIZMI

Bapak Aljabar

al-Kitāb al-mukhtasar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala

(Buku Ringkasan Kalkulasi dengan Melengkapkan dan Menyeimbangkan) adalah buku matematika yang ditulis oleh al-Khawarizmi pada tahun 830. Di dalam bukunya, beliau menjelaskan metode menyelesaikan linear dan notasi kuadrat yang dilambakan dengan mereduksi notasi ke dalam 6 bentuk standar (di mana b dan c adalah bilangan positif).

- Angka ekual kuadrat ($ax^2 = c$)
- Angka ekual akar ($bx = c$)
- Kuadrat dan akar ekual ($ax^2 + bx = c$)
- Kuadrat dan angka akar ekual ($ax^2 + c = bx$)
- Akar dan angka kuadrat ekual ($bx + c = ax^2$)
- Kuadrat ekual akar ($ax^2 = bx$)

Gambar di samping merupakan sebuah halaman dari buku aljabar yang ditulis oleh al-Khawarizmi.

Sumber: www.al-islam.org/works/al-khawarizmi

2. Akar-Akar Persamaan Kuadrat

a. Menentukan Akar-Akar Persamaan kuadrat

Misalkan, diketahui suatu persamaan $x^2 + 5x + 6 = 0$:

- Jika x pada persamaan tersebut diganti oleh 2,
 $x = 2$ maka $2^2 + 5(2) + 6 = 0$ (benar)
- Jika x pada persamaan tersebut diganti oleh 3,
 $x = 3$ maka $3^2 + 5(3) + 6 = 0$ (benar)
- Jika x pada persamaan tersebut diganti oleh 4,
 $x = 4$ maka $4^2 + 5(4) + 6 = 0$ (salah)
- Jika x pada persamaan tersebut diganti oleh 5,
 $x = 5$ maka $5^2 + 5(5) + 6 = 0$ (salah)

Dari uraian tersebut, dapat dilihat bahwa jika nilai x pada persamaan $x^2 + 5x + 6 = 0$ diganti oleh 2 atau 3, persamaan tersebut bernilai benar. Akan tetapi, jika nilai x pada persamaan $x^2 + 5x + 6 = 0$ diganti oleh selain 2 atau 3, persamaan tersebut bernilai salah. Nilai-nilai x yang jika disubstitusikan ke dalam suatu persamaan kuadrat menjadikan persamaan kuadrat itu bernilai benar dinamakan **penyelesaian persamaan kuadrat** atau **akar-akar persamaan kuadrat**.

Terdapat beberapa cara untuk menentukan akar-akar suatu persamaan kuadrat, yaitu sebagai berikut.

1. Cara memfaktorkan atau faktorisasi
2. Cara melengkapi kuadrat sempurna
3. Cara rumus kuadrat (rumus abc)

1) Faktorisasi

Penyelesaian persamaan kuadrat dengan memfaktorkan adalah mengubah bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi perkalian faktor-faktornya, yaitu $(x + x_1)(x + x_2)$, dengan x_1 dan x_2 merupakan faktor-faktor dari c yang jika dijumlahkan sama dengan b dan jika dikalikan sama dengan c .

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= b \\x_1 \cdot x_2 &= c\end{aligned}$$

Agar kamu lebih memahaminya, perhatikan uraian berikut.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x - x_1 = 0 \text{ atau } x - x_2 = 0$$

Jadi, akar-akarnya adalah $x = x_1$ atau $x = x_2$ dengan x_1 dan x_2 bilangan riil.

Jika dinyatakan dengan himpunan, himpunan penyelesaian persamaan kuadrat tersebut adalah $\{x_1, x_2\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian dari $x^2 - 5x + 6 = 0$?

Jawab:

Faktorkan menjadi berbentuk $(x + x_1)(x + x_2) = 0$.

Untuk menentukan nilai x_1 dan x_2 , tentukan dua faktor-faktor dari 6 yang jika dijumlahkan hasilnya -5 dan jika dikalikan hasilnya 6. Dengan cara coba-coba, diperoleh bahwa dua bilangan yang memenuhi persyaratan tersebut adalah -3 dan -2 sehingga $x_1 = -3$ dan $x_2 = -2$.

Dengan demikian, $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{atau} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya (Hp) adalah $\{2, 3\}$.

Tanya:

Diketahui persamaan kuadrat $20 - 7x - 3x^2 = 0$. Berapakah himpunan penyelesaiannya?

Jawab:

Faktor dari -3 adalah ± 1 dan ± 3 , faktor dari 20 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$ dan ± 20 .

Persamaan di atas dapat kita tulis menjadi

$$(-3x + \dots)(x + \dots) = 0.$$

Dua bilangan yang harus mengisi titik-titik itu adalah faktor-faktor dari 20 yang jika bilangan pada ruas kiri dikalikan, perkalian dalamnya menghasilkan $-7x$ dan perkalian luarnya menghasilkan 20.

Kedua bilangan itu adalah 4 dan 5 sehingga

$$20 - 7x - 3x^2 = 0$$

$$(-3x + 5)(x + 4) = 0$$

$$-3x + 5 = 0 \quad \text{atau} \quad x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \quad \quad x = -4$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya (HP) adalah $\left\{\frac{5}{3}, -4\right\}$.

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian dari $5x^2 - 45x = 0$?

Jawab:

$$5x^2 - 45x = 0 \quad (\text{faktor sekutu dari } 5x^2 \text{ dan } 45x \text{ adalah } 5x)$$

$$5x(x - 9) = 0$$

$$5x = 0 \quad \text{atau} \quad x - 9 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = 9$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya (HP) adalah $\{0, 9\}$.

LET'S DO IT



Perhatikan uraian berikut.

Misalkan, diketahui $x = y$.

Langkah 1: Kedua ruas kalikan dengan x :

$$x^2 = xy$$

Langkah 2: Kedua ruas dikurangi y^2 .

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

Langkah 3: Faktorkan kedua ruas.

$$(x + y)(x - y) = y(x - y)$$

Langkah 4: Bagi kedua ruas dengan $(x - y)$.

$$x + y = y$$

Oleh karena $x = y$ maka $2y = y$.

Langkah 5: Bagi kedua ruas dengan y .

$$2 = 1$$

Apakah benar $2 = 1$?

Di manakah letak kesalahannya?

ASAHI OTAK

MEMENITIKAN AKAL PERSAMAAN KUADRAT DENGAN FAKTORISASI

1. Dapatkah kamu menentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan kuadrat berikut dengan faktorisasi?

a. $x^2 + 5x - 14 = 0$

d. $3x^2 - 10x + 8 = 0$

b. $5 + 3x - 2x^2 = 0$

e. $4x^2 + 16x = 0$

c. $12a^2 - 16a - 38 = 0$

f. $10t^2 - t = 2$

2. Berapakah himpunan penyelesaian setiap persamaan kuadrat berikut?

a. $x - \frac{4}{3} = \frac{2}{3x}$

b. $4 - x = \frac{3x^2}{2x + 3}$

c. $\frac{2x^2 - 32}{4} = \frac{12x}{2}$

INFO MATEMATIKA

Persamaan linear dan kuadrat telah dikenal lebih dari 2.000 tahun yang lalu oleh bangsa Cina dan Babilonia. Mereka menggunakan kedua persamaan tersebut untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari, misalnya masalah pembagian warisan. Pada saat itu, belum dikenal metode umum menyelesaikan persamaan.



Sumber: id.wikipedia.org

2) Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Selain pemfaktoran, cara lain yang dapat digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat adalah melengkapkan kuadrat sempurna. Cara ini adalah menuliskan suatu persamaan kuadrat dalam bentuk $(x + p)^2 = q$, dengan p dan q anggota bilangan riil.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dapatkan kamu menentukan himpunan penyelesaian dari setiap bentuk berikut?

a. $(x - 3)^2 = 16$

b. $(x + 2)^2 = 3$

Jawab:

a. $(x - 3)^2 = 16$

$$x - 3 = \pm 4$$

(tarik akar pada kedua ruas)

$$x - 3 = 4 \quad \text{atau} \quad x - 3 = -4$$

$$x = 7 \quad \text{atau} \quad x = -1$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-1, 7\}$.

b. $(x + 2)^2 = 3$

$$x + 2 = \pm \sqrt{3}$$

(tarik akar pada kedua ruas)

$$x + 2 = \sqrt{3} \quad \text{atau} \quad x + 2 = -\sqrt{3}$$

$$x = -2 + \sqrt{3}$$

$$x = -2 - \sqrt{3}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$.



AMAZING PERSON



Sumber: www.famouspeople.net/germain.htm

SOPHIE GERMAIN (1776-1831)

Pencinta Matematika Sejak Belia

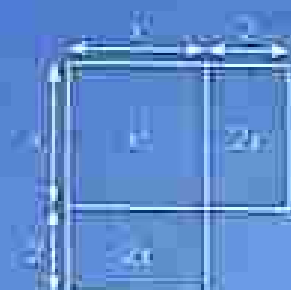
Perkenalan Sophie dengan bilangan dimulai sejak sangat belia. Hal ini disebabkan karena kertas dinding yang menghiasi kamar Sophie terdiri atas persamaan matematika. Dapatkan kamu membayangkan dinding kamar kamu dipenuhi persamaan?

Peninggiannya yang terus menerus dengan matematika menyebabkan ia memutuskan untuk mendalami matematika. Keputusan itu ia ambil pada usia 13 tahun setelah ia membaca mengenai Archimedes.

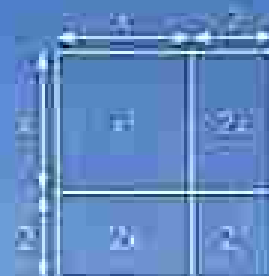
Sumbangan Sophie Germain di bidang matematika adalah di bidang geometri diferensial dan teori bilangan. Perannya di bidang matematika mengantarkan Sophie pada penghargaan dari Universitas Göttingen. Sayangnya, sebelum menerima penghargaan tersebut ia meninggal karena penyakit kanker payudara yang dideritanya. Sebagai penghormatan, sebuah kawah di Venus dinamai sesuai dengan namanya.

Sumber: http://www.maths.org.uk/history/18th/18th_03_26_sophie_germain

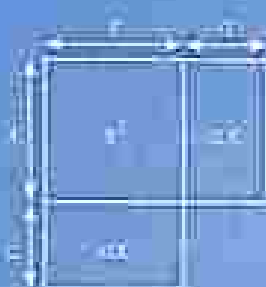
Melengkapkan kuadrat sempurna dapat diilustrasikan pada gambar berikut



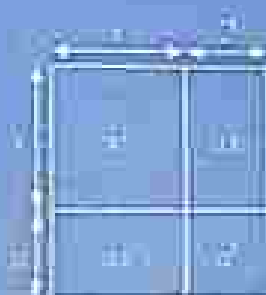
$$x^2 + 4x + 2^2 = (x+2)^2$$



$$x^2 + 2x + 1^2 = (x+1)^2$$



$$x^2 - 4x + 2^2 = (x-2)^2$$



$$x^2 - 6x + 3^2 = (x-3)^2$$

Secara umum, untuk mengubah bentuk $x^2 + kx$ menjadi kuadrat sempurna, harus ditambahkan kuadrat dari setengah koefisien variabel x , yaitu $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ sehingga $x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$.

Untuk dapat mengubah suatu persamaan kuadrat menjadi kuadrat sempurna seperti di atas maka harus diperhatikan bahwa koefisien x^2 adalah 1. Jadi, ketika suatu persamaan diubah menjadi kuadrat sempurna, koefisien x^2 haruslah 1.

Misalnya, untuk mengubah $x^2 - 8x$ menjadi kuadrat sempurna, tambahkan kuadrat dari setengah koefisien x , yaitu $\left(-\frac{8}{2}\right)^2$. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 &= x^2 - 8x + (-4)^2 \\ &= (x-4)^2 \end{aligned}$$

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian persamaan kuadrat $x^2 + 3x - 28 = 0$?

Jawab:

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

(persamaan kuadrat asal)

$$x^2 + 3x = 28$$

(pindahkan konstanta ke ruas kanan)

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 28 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \left(\text{tambahkan kedua ruas dengan } \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 28 + \frac{9}{4} \quad (\text{ruas kiri jadikan kuadrat sempurna})$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{121}{4}} = \pm \frac{11}{2} \quad (\text{tarik akar pada kedua ruasnya})$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2} \text{ maka } x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{11}{2} = 4 \text{ atau } x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{11}{2} = -7.$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya (Hp) = $\{-7, 4\}$.

Tanya:

Dapatkah kamu menentukan himpunan penyelesaian persamaan kuadrat $3x^2 - 4x - 6 = 0$?

Jawab:

$$3x^2 - 4x - 6 = 0$$

(persamaan kuadrat asal)

$$x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{6}{3} = 0$$

(jadikan koefisien $x^2 = 1$)

$$x^2 - \frac{4}{3}x = 2$$

(pindahkan konstanta ke ruas kanan)

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \quad \left(\text{tambahkan } \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{22}{9} \quad (\text{ruas kiri jadikan kuadrat sempurna})$$

$$x - \frac{2}{3} = \pm \sqrt{\frac{22}{9}} \quad (\text{tarik akar pada kedua ruasnya})$$

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{22} \text{ maka } x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{22} \text{ atau } x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{22}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{22}, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{22}\right\}$.

Dengan melengkapi kuadrat sempurna, berapakah himpunan penyelesaian setiap persamaan kuadrat berikut?

1. $(x + 1)^2 = 9$
2. $(3 + 7x)^2 = 65$
3. $x^2 - 6x - 16 = 0$
4. $2x - 3x^2 - 4 = 0$
5. $2x^2 - x - 3\frac{1}{2} = 0$
6. $(2x + 3)(x - 2) - x(x + 1) = 0$



AMAZING PERSON

JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE (1730-1813)

Matematikawan dan Astronom

Joseph-Louis de Lagrange adalah matematikawan dan astronom Prancis-Italia yang memberikan sumbangan penting pada ilmu mekanika klasik, angkasa, dan teori bilangan.

Dilahirkan di Turin, ia adalah campuran Italia dan Prancis. Ayahnya ialah orang kaya, namun suka menghambur-hamburkan kekayaannya. Menjelang akhir hayatnya, Lagrange menyebut kebiasaannya itu sebagai bencana yang menguntungkan karena, "Jika saya mewarisi kekayaan mungkin saya tidak akan mempertaruhkan nasib saya dengan matematika."

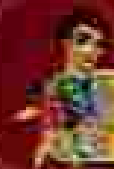
Ia berpaling pada matematika setelah membaca sebuah esai tentang kalkulus. Pada usia 19 tahun, ia memulai karyanya-mungkin yang terbesar, *Mécanique Analytique*, yang baru diterbitkan ketika ia berusia 52 tahun. Oleh karena tidak memiliki diagram yang lengkap dan komposisi terpadu, **William Rowan Hamilton** menyebut bukunya sebagai "sajak ilmiah".

Pada saat Lagrange mengirim beberapa hasil karyanya kepada **Leonhard Euler**, Euler andar akan kecemerlangan Lagrange dan menunda menerbitkan sejumlah karyanya sendiri yang berkaitan agar Lagrange-lah yang bisa menerbitkannya pertama kali-sebuah contoh langka tentang sifat seorang akademikus yang tak mementingkan diri sendiri.

Sumber: <http://www.id.wikipedia.org>

Sumber: enrichment.msu.org





TAKE A BREAK

Petani Jenius



Pak Karjo membawa 4 ekor kerbau A, B, C, dan D. Untuk menyeberangi sungai, setiap kerbau memerlukan waktu sebagai berikut.

Kerbau A = 1 menit

Kerbau B = 2 menit

Kerbau C = 5 menit

Kerbau D = 10 menit

Jika Pak Karjo harus membawa 2 ekor kerbau untuk setiap kali menyeberangi sungai dengan strategi:

- membawa kerbau A dan B pada penyeberangan pertama,
- kembali dengan membawa kerbau A,
- menyeberangkan kerbau A dan C,
- kembali dengan membawa kerbau A, lalu,
- menyeberangkan kerbau A dan D.

Strategi di atas menghabiskan waktu $(2 + 1 + 5 + 1 + 10)$ menit = 19 menit.

Dapatkah kalian menyeberangkan keempat kerbau milik Pak Karjo dengan **lebih cepat?**

3) Rumus Kuadrat (Rumus abc)

Terdapat beberapa persamaan kuadrat yang tidak dapat difaktorkan dengan cara menfaktorkan atau dengan melengkapi kuadrat sempurna. Untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat yang seperti ini, digunakan cara rumus kuadrat atau lebih dikenal dengan rumus abc.

Rumus abc dapat diperoleh dengan menurunkan cara melengkapi kuadrat sempurna, yaitu sebagai berikut.

Dari bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$, a , b , dan c anggota bilangan riil, serta $a \neq 0$ diperoleh

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

(pindahkan konstanta ke ruas kanan)

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

(jadikan koefisien x^2 sama dengan 1, kedua ruas dibagi a)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

(tambahkan $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ pada kedua ruas)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

(jadikan ruas kiri kuadrat sempurna)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

(samakan penyebut pada ruas kanan)

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

(tarik akar pada kedua ruas)

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dengan demikian, jika $ax^2 + bx + c = 0$ maka $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

dengan $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ atau $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

INFO MATEMATIKA

www.harunyahya.com/indo

Siapa yang tidak mengenal seorang **Harun Yahya**. Beliau adalah seorang penulis yang selama hidupnya didat untuk berdakwah tentang keberadaan dan keesaan Allah Swt.

Melalui situs ini, kamu dapat melihat beberapa hasil tulisannya yang berisi tentang kehebatan Allah Swt. Selain itu, tulisan-tulisan beliau juga banyak menjelaskan tentang keajaiban Al Quran jika dihubungkan dengan ilmu pengetahuan yang sedang berkembang saat ini.



Number: www.harunyahya.com

Tanya:

Apa himpunan penyelesaian persamaan kuadrat $2x^2 + 7x - 15 = 0$?

Jawab:

Pada persamaan $2x^2 + 7x - 15 = 0$, diperoleh $a = 2$, $b = 7$, dan $c = -15$.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} \\&= \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 13}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-7 - 13}{4} = -5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{3}{2}, -5\right\}$.

Tanya:

Apa himpunan penyelesaian persamaan kuadrat $4x^2 + 12x + 9 = 0$?

Jawab:

Pada persamaan $4x^2 + 12x + 9 = 0$, diperoleh $a = 4$, $b = 12$, dan $c = 9$.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} \\&= \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2} \quad \left(x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

ASAHI OTAK

MENENTUKAN AKAR PERSAMAAN KUADRAT DENGAN RUMUS *abc*

Tentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan kuadrat berikut dengan rumus kuadrat.

a. $(x + 1)^2 = 9$

d. $2x - 3x^2 - 4 = 0$

b. $(3 + 7x)^2 = 65$

e. $2x^2 - x - 3\frac{1}{2} = 0$

c. $x^2 - 6x - 16 = 0$

f. $(2x + 3)(x - 2) - x(x + 1) = 0$

b. Jenis Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Sebelum mengenal jenis akar-akar kuadrat, perhatikan soal-soal berikut.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Apa akar-akar penyelesaian setiap persamaan kuadrat berikut?

a. $x^2 - 7x + 12 = 0$

b. $x^2 - 4x + 4 = 0$

c. $x^2 + x + 2 = 0$

Jawab:

a. $x^2 - 7x + 12 = 0$

Pada persamaan $x^2 - 7x + 12 = 0$ diperoleh $a = 1$, $b = -7$, dan $c = 12$.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = 4 \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{7-1}{2} = 3$$

Perhatikan bahwa akar-akar penyelesaiannya berupa bilangan riil dan berbeda.

b. $x^2 - 4x + 4 = 0$

Pada persamaan $x^2 - 4x + 4 = 0$ diperoleh $a = 1$, $b = -4$, dan $c = 4$.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \quad \rightarrow x_1 = x_2 = 2\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa akar-akar penyelesaiannya sama (kembar).

c. $x^2 + x + 2 = 0$

Pada persamaan $x^2 + x + 2 = 0$ diperoleh $a = 1$, $b = 1$, dan $c = 2$.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \\x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa akar-akar penyelesaiannya khayal (imajiner).

Notes

Bilangan imajiner merupakan bilangan yang mempunyai sifat $i^2 = -1$.

Bilangan imajiner ditulis $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$, atau $x = \sqrt{-1}$.

Notes

Pada Tanya & Jawab sebelumnya, terlihat bahwa jenis akar penyelesaian persamaan kuadrat tidaklah sama. Terdapat dua akar penyelesaian pada jawaban (a), satu akar penyelesaian pada jawaban (b), dan pada jawaban (c) tidak ada bilangan riil yang memenuhi persamaan kuadratnya karena $\sqrt{-7}$ merupakan bilangan imajiner (khayal).

Perbedaan banyaknya akar penyelesaian (jenis akar) persamaan kuadrat ternyata bergantung dari bilangan yang ada di bawah tanda akar, yaitu $b^2 - 4ac$. Oleh karena $b^2 - 4ac$ membedakan jenis akar maka $b^2 - 4ac$ disebut dengan **diskriminan** dan dilambangkan D .

Dengan menggunakan diskriminan, kita dapat menentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tanpa harus menyelesaikannya terlebih dahulu. Apakah akarnya riil dan berbeda, kembar atau sama, atau akarnya khayal?

Berdasarkan nilai diskriminan (D), jenis-jenis akar persamaan kuadrat dapat ditentukan sebagai berikut.

- Jika $D > 0$ maka kedua akarnya nyata dan berbeda.
 - Jika D merupakan bilangan kuadrat maka kedua akar nyata, berbeda, dan rasional.
 - Jika D bukan merupakan bilangan kuadrat maka kedua akar nyata, berbeda, dan irasional.
- Jika $D = 0$ maka kedua akar nyata dan sama (kembar).
- Jika $D < 0$ maka kedua akar tidak nyata (tidak riil).

TANYA & JAWAB

Tanya:

Coba kamu tentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat berikut tanpa menyelesaikan persamaannya.

- $3x^2 - 5x - 2 = 0$
- $2x - 3x^2 + 3 = 0$
- $9x^2 - 6x + 1 = 0$
- $x^2 + 2x + 3 = 0$

Jawab:

- Pada persamaan $3x^2 - 5x - 2 = 0$ diperoleh $a = 3$, $b = -5$, dan $c = -2$.
 $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$ ($D > 0$)
Oleh karena $D > 0$ dan merupakan kuadrat sempurna maka kedua akar persamaan itu nyata, berlainan, dan rasional.
- Pada persamaan $2x - 3x^2 + 3 = 0$ diperoleh $a = -3$, $b = 2$, dan $c = 3$.
 $D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (3) = 4 + 36 = 40$ ($D > 0$)
Oleh karena $D > 0$ dan bukan merupakan kuadrat sempurna maka kedua akar persamaan itu nyata, berlainan, dan irasional.
- Pada persamaan $9x^2 - 6x + 1 = 0$ diperoleh $a = 9$, $b = -6$, dan $c = 1$.
 $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (1) = 36 - 36 = 0$ ($D = 0$)
Oleh karena $D = 0$ maka kedua akar persamaan itu nyata dan sama.
- Pada persamaan $x^2 + 2x + 3 = 0$ diperoleh $a = 1$, $b = 2$, dan $c = 3$.
 $D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3) = 4 - 12 = -8$ ($D < 0$)
Oleh karena $D < 0$ maka akar-akarnya tidak nyata (khayal).

ASAHI OTAK

MENENTUKAN JENIS AKAR DARI SAMAAN KUADRAT

Tanpa menyelesaikan persamaan, dapatkah kamu menentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat berikut?

1. $2x^2 + 7x - 15 = 0$
2. $9x^2 - 12x + 4 = 0$
3. $x^2 + 2x - 4 = 0$
4. $-3x^2 + 2x - 7 = 0$
5. $x^2 - 5x + 1 = 0$
6. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

INFO MATEMATIKA

Matematika Arab dapat dibagi ke dalam 4 kategori, yaitu sebagai berikut.

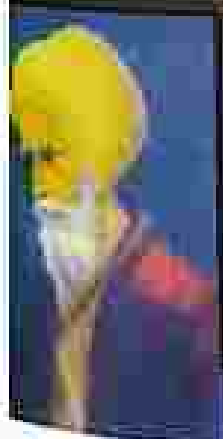
1. **Aritmatika:** Aritmatika merupakan materi yang dianggap turunan dari India dan didasarkan pada prinsip posistal.
2. **Aljabar:** Meskipun berasal dari Yunani, Hindu, dan sumber-sumber lain di Babylonia, akan tetapi di tangan para pakar Muslim, aljabar diubah menjadi materi yang mempunyai karakteristik baru dan lebih sistematis.
3. **Trigonometri:** Dengan rumuan utama dari Yunani, dikembangkan oleh bangsa Arab dan diolah menurut cara Hindu, trigonometri berkembang hingga mempunyai lebih banyak fungsi dan rumus. Kategori ini menjadi dikenal karena peran Ibn-Yunus (meninggal tahun 1008) dan Alhazan, keduanya merupakan matematikawan Mesir yang mengenalkan rumus

$$2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$$

Rumus tersebut sangat besar pengaruhnya bagi perkembangan matematika pada umumnya dan trigonometri pada khususnya, pada abad 16, sebelum ditemukan logaritma.

4. **Geometri:** Geometri juga berasal dari Yunani. Akan tetapi, bangsa Arab mengembangkannya sampai mengkilat hingga seperti sekarang ini. Setelah era Alhazan, geometri dikembangkan oleh ilmuwan Timur yang oleh orang Barat lebih dikenal sebagai penyair, yaitu **Omar Khayyam**.

Sumber: www.muslim-daily.com



Sumber: www.muslim-daily.com, www.berita-sunda.com, dan www.berita-sunda.com

c. Menghitung Koefisien Persamaan Kuadrat yang Akar-Akarnya Memenuhi Sifat Tertentu

Selain untuk menentukan jenis akar-akar dari suatu persamaan kuadrat, diskriminan juga dapat digunakan untuk menghitung koefisien suatu persamaan kuadrat yang akar-akarnya memiliki sifat-sifat tertentu.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui persamaan kuadrat $(m + 3)x^2 + 2(m - 7)x + m - 3 = 0$.

Berapakah nilai m agar persamaan tersebut mempunyai akar-akar nyata dan berbeda?

Jawab:

Pada persamaan $(m + 3)x^2 + 2(m - 7)x + m - 3 = 0$ diperoleh $a = m + 3$, $b = 2(m - 7)$, dan $c = m - 3$.

Syarat persamaan kuadrat memiliki akar-akar nyata dan berbeda adalah $D > 0$.

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$(2m - 14)^2 - 4(m + 3)(m - 3) > 0$$

$$4m^2 - 56m + 196 - 4(m^2 - 3m + 3m - 9) > 0$$

$$4m^2 - 56m + 196 - 4m^2 + 36 > 0$$

$$-56m + 232 > 0$$

$$-56m > -232$$

$$m < \frac{29}{7}$$

Jadi, agar persamaan tersebut memiliki akar-akar nyata dan berbeda nilai m haruslah lebih kecil

$$\text{dari } \frac{29}{7}.$$

Tanya:

Diketahui persamaan kuadrat $(m + 2)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$.

Berapakah nilai m agar persamaan tersebut memiliki akar-akar yang tidak riil?

Jawab:

Pada persamaan $(m + 2)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ diperoleh $a = m + 2$, $b = 2m$, dan $c = m - 1$.

Syarat persamaan kuadrat memiliki akar-akar yang tidak riil adalah $D < 0$.

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(2m)^2 - 4(m + 2)(m - 1) < 0$$

$$4m^2 - 4(m^2 - m + 2m + 2) < 0$$

$$4m^2 - 4m^2 + 4m - 8m + 8 < 0$$

$$-4m + 8 < 0$$

$$-4m < -8$$

$$m > 2$$

Jadi, agar persamaan tersebut memiliki akar-akar yang tidak riil nilai m haruslah lebih besar dari 2.

Tanya:

Jika persamaan $t = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 6x + 3}$ mempunyai dua akar yang sama untuk $t_1 = a$ dan $t_2 = b$, berapakah nilai $a + b$?

Jawab:

Diketahui akar-akar persamaan $t = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 6x + 3}$ adalah sama atau $x_1 = x_2$. Dengan demikian, $D = 0$.

$$t = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 6x + 3}$$

$$t(x^2 + 6x + 3) = x^2 + 4x + 2 \quad (\text{dikali silang})$$

$$tx^2 + 6tx + 3t = x^2 + 4x + 2$$

$$tx^2 - x^2 + 6tx - 4x + 3t - 2 = 0 \quad (\text{ruas kanan dijadikan sama dengan 0})$$

$$(t - 1)x^2 + (6t - 4)x + (3t - 2) = 0$$

Dari bentuk di atas, diperoleh $a = t - 1$, $b = 6t - 4$, dan $c = 3t - 2$.

Oleh karena $D = 0$ maka

$$(6t - 4)^2 - 4(t - 1)(3t - 2) = 0$$

$$36t^2 - 48t + 16 - 4(3t^2 - 5t + 2) = 0$$

$$24t^2 - 28t + 8 = 0$$

$$6t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$(3t - 2)(2t - 1) = 0$$

$$t_1 = a = \frac{2}{3} \quad \text{atau} \quad t_2 = b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi, } a + b = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

ASAHI OTAK

MENGHITUNG KOEFISIEN PERSAMAAN KUADRAT YANG AKAR-AKARNYA MEMENUHI SUDUT TERTENTU

1. Buktikan bahwa persamaan kuadrat $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 - 2bc - c^2 = 0$ mempunyai akar-akar riil.
2. Jika persamaan $x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 3a - 4 = 0$ mempunyai akar-akar yang riil, berapakah nilai a yang memenuhi persamaan tersebut?
3. Berapakah nilai p agar persamaan kuadrat $2px^2 - 16x + 16 = 0$ mempunyai dua akar kembar? Tentukan pula akar-akarnya.
4. Bagaimanakah jenis akar persamaan kuadrat $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - 2a} = 1$ untuk $a \neq 0$?

d. Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Untuk menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat, perhatikan kembali rumus abc .

Misalkan, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dan $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sehingga

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Jadi, jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 10 = 0$.

- Berapakah akar-akar penyelesaian persamaan kuadrat tersebut?
- Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar dari persamaan $x^2 - 3x - 10 = 0$, berapakah nilai $x_1 + x_2$ (jumlah akar-akar persamaan kuadrat) dan $x_1 \cdot x_2$ (hasil kali akar-akar persamaan kuadrat)?

Jawab:

- Menentukan akar-akar penyelesaian persamaan $x^2 - 3x - 10 = 0$.

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 5 \text{ atau } x_2 = -2$$

Jadi, akar-akar penyelesaiannya adalah $x_1 = -2$ atau $x_2 = 5$.

- Misalkan, $x_1 = -2$ dan $x_2 = 5$.

Cara 1

Jumlah akar-akar persamaan kuadrat: $x_1 + x_2 = -2 + 5 = 3$

Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat: $x_1 \cdot x_2 = (-2)(5) = -10$

Cara 2

Pada persamaan $x^2 - 3x - 10 = 0$ diperoleh $a = 1$, $b = -3$, dan $c = -10$.

Jumlah akar-akar persamaan kuadrat: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1}$

Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-10}{1}$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Jika p dan q adalah akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 4x - 1 = 0$, tentukan nilai dari bentuk-bentuk berikut.

- a. $p + q$ b. $p \cdot q$ c. $p^2 + q^2$ d. $p^3 + q^3$

Jawab:

Pada persamaan $3x^2 + 4x - 1 = 0$, diperoleh $a = 3$, $b = 4$, dan $c = -1$.

a. $p + q = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{3}$

b. $pq = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$

c. $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq$
 $= \left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{16}{9} + \frac{2}{3} = \frac{22}{9}$

d. $p^3 + q^3 = (p + q)^3 - 3pq(p + q)$
 $= \left(\frac{-4}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)$
 $= \left(\frac{-64}{27}\right) - \left(\frac{36}{27}\right) = \frac{-100}{27}$

LET'S DO IT



Jika akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 , buktikan bahwa:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2)$$

Tanya:

Jika m dan n akar-akar persamaan $x^2 - 4x + 5 = 0$, tentukan nilai dari bentuk-bentuk berikut.

- a. $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ c. $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$ e. $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$
 b. $m^2 + n^2$ d. $(m - n)^2$

Jawab:

Pada persamaan $x^2 - 4x + 5 = 0$ diperoleh $a = 1$, $b = -4$, dan $c = 5$.

$$m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4 \text{ dan } m \cdot n = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5.$$

a. $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m + n}{m \cdot n} = \frac{4}{5}$

b. $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2m \cdot n = 4^2 - 2 \cdot 5 = 16 - 10 = 6$

c. $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{m^2 + n^2}{m^2 \cdot n^2} = \frac{m^2 + n^2}{(mn)^2} = \frac{6}{5^2} = \frac{6}{25}$

d. $(m - n)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right) = \frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{1} = 16 - 20 = -4$

e. $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{m \cdot n} = \frac{6}{5}$

e. Menghitung Koefisien Persamaan Kuadrat yang Akar-Akarnya Memenuhi Sifat-Sifat Tertentu

Jika pada bagian yang lalu telah dibahas bagaimana cara menghitung koefisien suatu persamaan kuadrat dengan menggunakan diskriminan, maka pada bagian ini kita akan mencari koefisien suatu persamaan kuadrat yang mempunyai sifat-sifat tertentu yang terkait dengan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat. Sifat-sifat tersebut antara lain adalah

1. salah satu akarnya dua kali akar yang lain,
2. salah satu akarnya tiga lebihnya dari akar yang lain, dan yang lainnya

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 + ax - 4 = 0$ adalah lima lebih besar dari akar yang lain. Berapakah nilai a yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut?

Jawab:

Jika akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax - 4 = 0$ adalah x_1 dan x_2 maka $x_1 = 5 + x_2$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -a \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = -4 \rightarrow (5 + x_2)x_2 = -4 \rightarrow 5x_2 + x_2^2 = -4 \rightarrow x_2^2 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$x_2^2 + 5x_2 + 4 = 0$$

$$(x_2 + 4)(x_2 + 1) = 0$$

$$x_2 + 4 = 0 \text{ atau } x_2 + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -4 \text{ atau } x_2 = -1$$

$$\text{Untuk } x_2 = -4 \text{ maka } x_1 = 5 + x_2 = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Untuk } x_2 = -1 \text{ maka } x_1 = 5 + x_2 = 5 - 1 = 4$$

$$x_1 + x_2 = -a \rightarrow 1 + (-4) = -a \text{ maka } a = 3 \text{ atau } 4 + (-1) = -a \text{ maka } a = -3.$$

Tanya:

Diketahui $2x^2 + 3x - n + 1 = 0$ dengan akar-akar p dan q . Jika $p^2 - q^2 = -\frac{27}{4}$, berapakah nilai n ?

Jawab:

$$p + q = \frac{-b}{a} = -\frac{3}{2} \text{ dan } p \cdot q = \frac{-n+1}{2}$$

$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q) = -\frac{27}{4}$$

$$-\frac{3}{2}(p - q) = -\frac{27}{4} \text{ maka } p - q = \frac{9}{2} \quad \dots (1)$$

$$p + q = -\frac{3}{2} \quad \dots (2)$$

$$\text{Dari (1) dan (2) diperoleh } 2p = \frac{6}{2} = 3 \text{ maka } p = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Substitusikan } p = \frac{3}{2} \text{ pada (1) diperoleh } \frac{3}{2} - q = \frac{9}{2} \rightarrow q = -3 \text{ sehingga}$$

$$p \cdot q = \frac{-n+1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (-3) = \frac{-n+1}{2} \rightarrow -n+1 = -9 \text{ maka } n = 10.$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + a = 0$ dengan a bilangan riil. Agar persamaan tersebut memiliki dua akar berbeda yang positif, berapakah nilai a ?

Jawab:

Pada persamaan $2x^2 - 4x + a = 0$ diperoleh $a = 2$, $b = -4$, dan $c = a$.

Jika akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah x_1 dan x_2 maka

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = 2 \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} a$$

Syarat persamaan kuadrat memiliki dua akar berbeda yang positif adalah $D > 0$.

Ini berarti $x_1 + x_2 > 0$ dan $x_1 \cdot x_2 > 0$

$$(i) \quad D > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot a > 0 \rightarrow 16 - 8a > 0 \rightarrow a < 2$$

$$(ii) \quad x_1 + x_2 > 0 \rightarrow 2 > 0$$

$$(iii) \quad x_1 \cdot x_2 > 0 \rightarrow \frac{1}{2} a > 0 \rightarrow a > 0$$

Dari (i) dan (iii) maka $0 < a < 2$.

Notes

Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka akar-akar tersebut terkadang berelasi, yaitu sebagai berikut.

1. Jika x_1 dan x_2 berkebalikan maka $a = c$.
2. Jika x_1 dan x_2 berlawanan maka $b = 0$.
3. Jika x_1 dan x_2 bertanda sama positif maka a dan b berbeda tanda serta a dan c bertanda sama.
4. Jika x_1 dan x_2 bertanda sama negatif maka a dan b bertanda sama serta a dan c bertanda sama.
5. Jika x_1 dan x_2 berbeda tanda maka a dan c berbeda tanda.

ASAHI OTAK

MENGHITUNG KOEFISIEN PERSAMAAN KUADRAT YANG AKAR-ARUNYA MEMENUHI SYARAT TERLENTU

1. Jika akar-akar persamaan kuadrat $\frac{2x+3}{4x-1} = \frac{3x-2}{3x+2}$ adalah x_1 dan x_2 , berapakah nilai $x_1 + x_2$ dan $x_1 \cdot x_2$?
2. Diketahui akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 - 3bx + 5(a-3) = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Jika $x_1^2 + x_2^2 = 117$, berapakah nilai $a^2 + a$?
3. Berapakah batas-batas nilai c agar persamaan $x^2 + 2x + c - 3 = 0$ mempunyai dua akar yang bernilai negatif?

3. Menyusun Persamaan Kuadrat

a. Menyusun Persamaan Kuadrat Secara Umum

Akar-akar persamaan $x^2 - 5x + 4 = 0$ dapat dicari dengan faktorisasi.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (\text{persamaan kuadrat})$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0 \quad (\text{pembuktian})$$

$$x = 4 \text{ atau } x = 1 \quad (\text{akar-akar persamaan kuadrat})$$

Seandainya langkah-langkah di atas kita balik, maka

$$x = 4 \text{ atau } x = 1 \quad (\text{akar-akar persamaan kuadrat})$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0 \quad (\text{pembuktian})$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (\text{persamaan kuadrat})$$

Jadi, persamaan kuadrat dapat disusun jika akar-akarnya diketahui.

Menentukan suatu persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui dapat kita lakukan dengan 2 cara, yaitu:

1. memakai faktor-faktor, atau
2. memakai jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat.

b. Memakai Faktor-Faktor

Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka persamaan kuadrat baru yang dapat disusun dengan menggunakan faktor-faktornya adalah

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah bentuk persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{4}$?

Jawab:

Misalnya, akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah x_1 dan x_2 maka $x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = -\frac{1}{4}$.

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$$

$$8x^2 - 2x - 1 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $8x^2 - 2x - 1 = 0$.

c. Memakai Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar

Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (\text{memakai faktor-faktor})$$

$$x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1 \cdot x_2 = 0 \quad (\text{jabarkan})$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0 \quad (\text{persamaan kuadrat dengan menggunakan jumlah dan hasil kali akar-akar})$$

Jadi, jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka persamaan kuadrat baru yang dapat disusun dengan menggunakan jumlah dan hasil kali akar-akarnya adalah

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah bentuk persamaan kuadrat yang akar-akarnya:

- a. -3 dan 5 b. $2 + \sqrt{2}$ dan $2 - \sqrt{2}$

Jawab:

- a. Misalkan, akar-akarnya adalah x_1 dan x_2 maka $x_1 = -3$ dan $x_2 = 5$.

$$x_1 + x_2 = -3 + 5 = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 5 = -15$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $x^2 - 2x - 15 = 0$.

- b. Misalkan, akar-akarnya adalah x_1 dan x_2 maka $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ dan $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

$$x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$$

$$x_1 \cdot x_2 = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $x^2 - 4x + 2 = 0$.



TAKE A BREAK

Sekelompok siswa pergi berkemah di sebuah pulau yang terpencil. Setelah beberapa hari berada di pulau tersebut, persediaan beberapa kebutuhan pokok mulai menipis. Untuk memenuhi kebutuhan sehari-hari mereka, beberapa orang diminta untuk pergi ke pulau lain mencari segala sesuatu yang dibutuhkan. Pada hari pertama, 10 orang diminta untuk pergi ke pulau lain dan hanya 2 orang yang kembali. Sisanya, tidak mau kembali ke pulau dan memilih pulang ke rumah masing-masing. Pada hari kedua, 12 orang pergi dan hanya 3 yang kembali. Jika hal ini terjadi secara terus menerus mengikuti pola yang sama, berapa banyak siswa yang tinggal di pulau selama satu minggu sejak kepergian kelompok pertama ke pulau lain? Berapa orang yang tinggal?

d. Menyusun Persamaan Kuadrat Jika Akar-Akarnya Mempunyai Hubungan dengan Akar-Akar Persamaan Kuadrat Lainnya

Jika akar-akar suatu persamaan kuadrat mempunyai hubungan dengan akar-akar suatu persamaan kuadrat lainnya maka untuk menyusun persamaan kuadrat baru tersebut dapat menggunakan 2 cara, yaitu:

1. menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar atau
2. menggunakan substitusi.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui α dan β adalah akar-akar persamaan $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Bagaimanakah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{\alpha}{\beta}$ dan $\frac{\beta}{\alpha}$?

Jawab:

Pada persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 4 = 0$, akar-akarnya adalah α dan β .

Ini berarti, $\alpha + \beta = 2$ dan $\alpha \cdot \beta = -4$.

Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{\alpha}{\beta}$ dan $\frac{\beta}{\alpha}$ adalah sebagai berikut.

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)x + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \right)x + 1 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \right)x + 1 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{4 - 2(-4)}{-4} \right)x + 1 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{12}{-4} \right)x + 1 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $x^2 + 3x + 1 = 0$.

LET'S DO IT

Coba kamu jawab pertanyaan berikut.

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $x^2 + nx + 1 = 0$, bagaimanakah bentuk

persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$ dan $x_1^3 + x_2^3$?



TANYA & JAWAB

Tanya:

Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + bx - 50 = 0$ adalah satu lebih kecil dari tiga kali akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x + a = 0$. Bagaimanakah persamaan kuadrat yang akar-akarnya a dan b ?

Jawab:

Misalkan, akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x + a = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Ini berarti, $x_1 + x_2 = -1$ dan $x_1 \cdot x_2 = a$.

Misalkan, akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + bx - 50 = 0$ adalah x_3 dan x_4 .

Ini berarti, $x_3 = (3x_1 - 1)$ dan $x_4 = (3x_2 - 1)$:

$$x_3 + x_4 = -b \rightarrow (3x_1 - 1) + (3x_2 - 1) = 3(x_1 + x_2) - 2 = -b$$

$$3(-1) - 2 = -b$$

$$b = 5$$

$$x_3 \cdot x_4 = -50 \rightarrow (3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 9x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1 = -50$$

$$9a + 3 + 1 = -50$$

$$a = -6$$

Jadi, persamaan kuadrat yang akar-akarnya $a = -6$ dan $b = 5$ adalah

$$x^2 - (a + b)x + (a \cdot b) = 0 \rightarrow x^2 + x - 30 = 0.$$



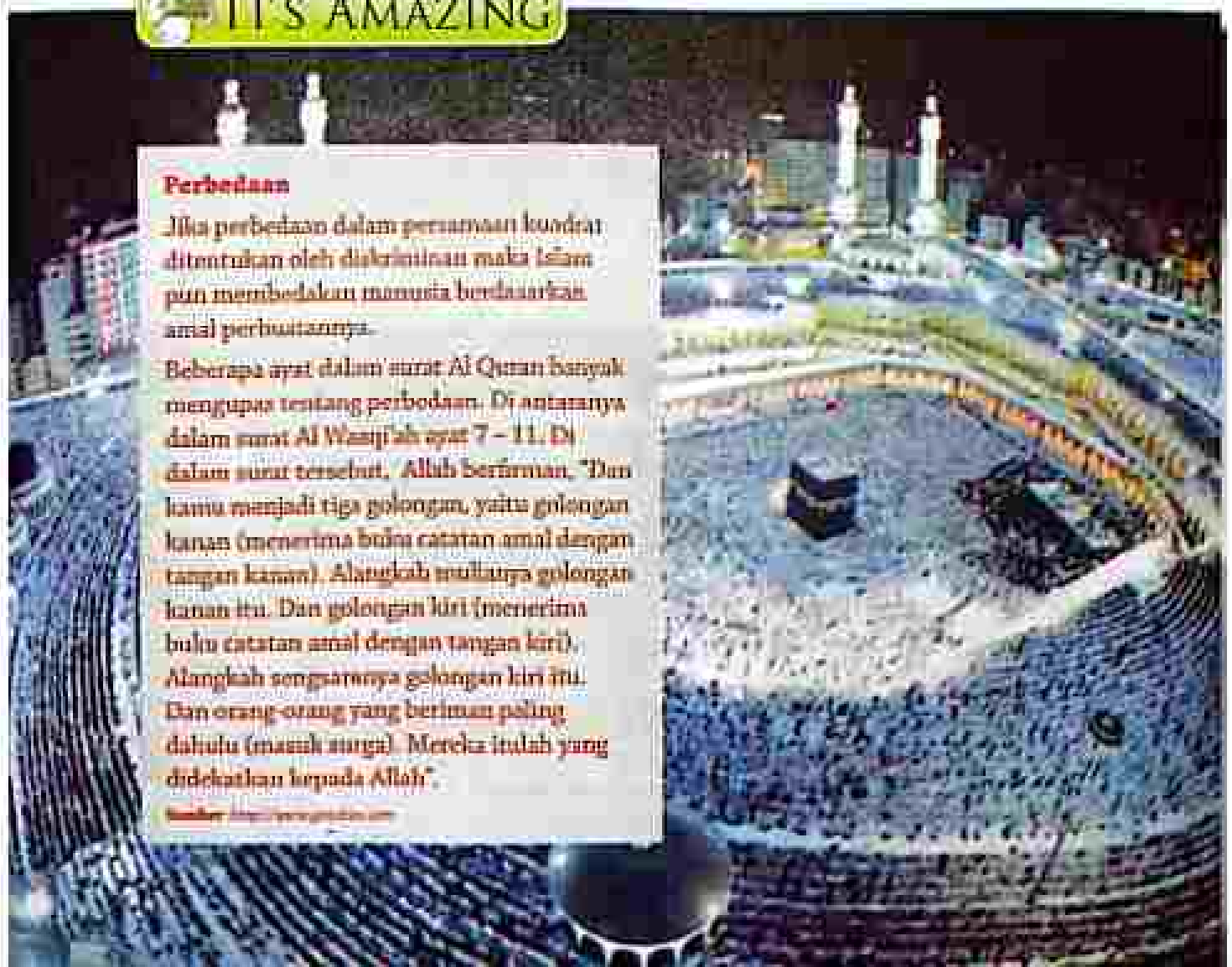
IT'S AMAZING

Perbedaan

Jika perbedaan dalam persamaan kuadrat ditentukan oleh diskriminan maka Islam pun membedakan manusia berdasarkan amal perbuatannya.

Beberapa ayat dalam surat Al Quran banyak mengupas tentang perbedaan. Di antaranya dalam surat Al Wasyiah ayat 7 - 11. Di dalam surat tersebut, Allah berfirman, "Dan kamu menjadi tiga golongan, yaitu golongan kanan (menerima buku catatan amal dengan tangan kanan). Alangkah mulia golongan kanan itu. Dan golongan kiri (menerima buku catatan amal dengan tangan kiri). Alangkah sengatannya golongan kiri itu. Dan orang-orang yang beriman paling dahulu (masuk surga). Mereka itulah yang didedahkan kepada Allah".

Sumber: <http://www.pengalam.com>



ASAHI OTAK

MENYUSUN PERSAMAAN KUADRAT

1. Bagaimanakah bentuk persamaan kuadrat yang akar-akarnya:
 a. -4 dan -5 b. $\frac{2}{3}$ dan $-\frac{3}{2}$ c. $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$ dan $\frac{1}{1-\sqrt{5}}$
2. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $2x^2 - 3x - 1 = 0$, dapatkan kamu menentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{x_1+2}$ dan $\frac{1}{x_2+2}$?
3. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 3x - 1 = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Bagaimanakah bentuk persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya satu lebih kecil dari dua kali akar-akar persamaan kuadrat tersebut?
4. Diketahui persamaan kuadrat $2x^2 - 3x - 4 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Buatlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $-\frac{1}{x_1}$ dan $-\frac{1}{x_2}$.
5. Jika persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 5 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 , bagaimanakah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ dan $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$?
6. Diketahui persamaan kuadrat $x^2 - 6x - 3 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 , dapatkan kamu membuat persamaan yang akar-akarnya $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$ dan $x_1 \cdot x_2$? Bagaimanakah bentuknya?



JAWABING PERSOAN

SHARAF AL-DIN AL-MUZAFFAR AL-TUSI (1136-1209)

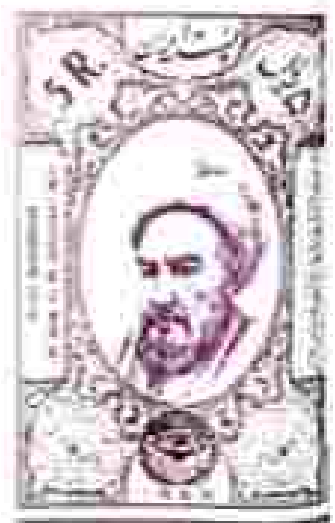
Ilmuwan Serba Bisa dari Persia

Ilmuwan serba bisa. Julukan itu rasanya amat pantas disandang oleh **Al-Tusi**. Sumbangannya bagi perkembangan ilmu pengetahuan modern sungguh tak ternilai besarnya. Selama hidupnya, ilmuwan Muslim dari Persia itu mendedikasikan diri untuk mengembangkan beragam ilmu seperti, astronomi, biologi, kimia, matematika, filsafat, kedokteran, hingga ilmu agama Islam.

Pada tahun 1259, **Sharaf Al-Din Al-Muzaffar Al-Tusi** yang dikenal juga dengan **Nasiruddin Al-Tusi**, membangun Observatorium di Maragha, di wilayah Azerbaijan. Di tempat itu, Nasiruddin tak cuma mengembangkan bidang astronomi saja. Dia pun turut mengembangkan matematika serta filsafat.

Nasiruddin meninggal dunia pada 26 Juni 1274 M di Baghdad. Meski begitu, jasa dan kontribusinya dalam pengembangan ilmu pengetahuan masih tetap dikenang. Namanya, disabdikan menjadi salah satu nama kawah di Bulan.

Sumber: <http://www.dikdikdik.com>



Sumber: www.dikdikdik.com

B. Fungsi Kuadrat

1. Fungsi

Ajeng berjalan-jalan di toko buku untuk membeli beberapa buah pulpen. Ketika asyik memilih, ia melihat setumpuk pulpen yang dijual dengan harga cukup murah. Masing-masing pulpen dijual dengan harga Rp1.500,00 per buah. Ajeng menyukai pulpen-pulpen tersebut dan berniat membeli beberapa di antaranya. Berapa banyak uang yang harus Ajeng bayar untuk 2, 4, atau 5 pulpen yang dibelinya?

Kejadian di atas dapat kita tuliskan dalam bentuk persamaan dua variabel.

Misalkan, banyaknya pulpen adalah x dan banyaknya uang yang harus dibayar dinyatakan dengan y maka persamaannya adalah $y = 1.500x$.

Hubungan (relasi) x dan y dapat dibuat dalam bentuk tabel sebagai berikut.

Banyaknya Pulpen (x)	Hubungan (relasi) $y = 1.500x$	Harga yang Harus Dibayar (y)
2	$y = 1.500(2)$	3.000
4	$y = 1.500(4)$	6.000
5	$y = 1.500(5)$	7.500

Relasi yang demikian disebut **fungsi** atau **pemetaan** dengan:

- himpunan $X = \{2, 4, 5\}$ disebut daerah asal (domain),
- himpunan $Y = \text{bilangan riil}$ disebut daerah kawan (kodomain), dan
- himpunan semua anggota Y yang dipasangkan dengan setiap anggota himpunan X disebut daerah hasil atau range yaitu $\{3.000, 6.000, 7.500\}$.

Fungsi atau pemetaan adalah relasi himpunan A ke himpunan B yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat pada satu anggota pada himpunan B .

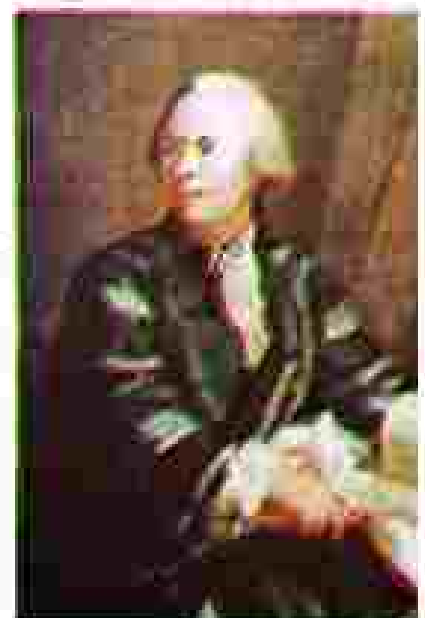


LEONHARD EULER (1707-1783)

Abdi Matematika, Mekanika, dan Fisika

Leonhard Euler (dilafalkan "oiler") adalah matematikawan dan fisikawan Swiss. Bersama **Archimedes**, **Gauss**, dan **Newton**, ia dipandang sebagai salah satu matematikawan terbesar sepanjang masa. Leonhard Euler adalah orang pertama yang menggunakan istilah "fungsi" untuk memberikan ungkapan matematis yang melibatkan berbagai parameter, misalnya $y = f(x)$. Ia dianggap sebagai salah seorang yang pertama kali menerapkan kalkulus pada fisika.

Sumber: id.wikipedia.org



Sumber: id.wikipedia.org

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui fungsi $f: x \rightarrow 3x - 1$ dengan daerah asal $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$

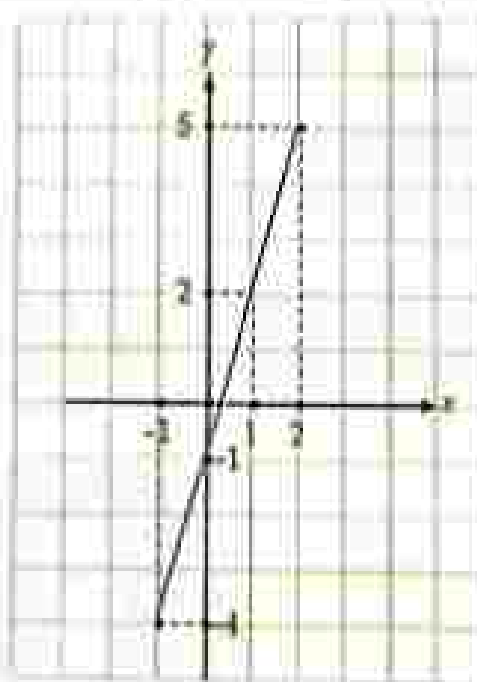
- Berapakah nilai fungsi f untuk $x = -1, x = 0, x = 1$, dan $x = 2$?
- Bagaimana gambar grafik fungsi f pada bidang cartesius?
- Tentukan daerah hasil fungsi f -nya.

Jawab:

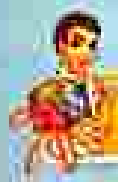
- Nilai fungsi f untuk $x = -1, x = 0, x = 1$, dan $x = 2$ adalah

x	$f(x) = 3x - 1$	$f(x)$	titik $(x, f(x))$
-1	$f(-1) = 3(-1) - 1$	-4	$(-1, -4)$
0	$f(0) = 3(0) - 1$	-1	$(0, -1)$
1	$f(1) = 3(1) - 1$	2	$(1, 2)$
2	$f(2) = 3(2) - 1$	5	$(2, 5)$

- Grafik fungsi f pada bidang cartesius adalah



- Dari grafik terlihat bahwa daerah hasilnya adalah $\{y \mid -4 \leq y \leq 5, y \in \mathbb{R}\}$.



TAKE A BREAK

Menebak Rumus Fungsi

Alat dan Bahan:

Kertas, papan tulis, dan alat tulis.

Cara Bermain:

- Bentuklah beberapa kelompok yang terdiri atas 4 sampai dengan 6 orang siswa.
- Setiap kelompok menuliskan fungsi dan tidak diperlihatkan pada kelompok lain.
- Setiap kelompok (misalnya, kelompok A) membuat tabel di depan kelas, seperti pada tabel berikut.

x	Fungsi	y

- Kelompok lain memberikan sembarang nilai x dan kelompok A akan menuliskan nilai y .
- Nilai x yang dimasukkan maksimal 10 kali dan kelompok lain dapat menebak fungsi yang diminta tanpa harus menunggu sampai nilai x yang dimasukkan mencapai nilai maksimal.
- Kelompok yang berhasil menebak mendapat nilai 5.
- Kelompok yang menang adalah kelompok yang banyak mengumpulkan nilai.

INFO MATEMATIKA

www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Arabic_mathematics.html#49

Situs ini berisi biografi matematikawan-matematikawan Arab yang memberi peranan yang sangat besar bagi perkembangan matematika saat ini. Mungkin ada yang menganggap bahwa selama ini, yang telah memberikan sumbangsih terbesar bagi perkembangan matematika adalah matematikawan Eropa. Coba kamu buka situs ini. Kamu akan membuktikan bahwa matematikawan Arab telah mempelajari matematika jauh sebelum bangsa Eropa mempelajarinya.

1. Dapatkah kamu melengkapi tabel berikut?

n	t
44	...
132	...
165	...

Keterangan: n dan t dihubungkan dengan fungsi $t = \frac{n}{11}$ dengan n menunjukkan banyaknya pertandingan voli dan t menunjukkan banyaknya tim yang bertanding.

2. Diketahui fungsi $y = 40x$ menunjukkan banyaknya air dalam galon yang digunakan untuk mencuci x pakaian pada sebuah mesin cuci.
- Berapa banyak air dalam galon yang dipakai untuk mencuci 1 sampai 6 pakaian?
 - Bagaimanakah daerah asal dan range-nya?
 - Berapa banyak pakaian yang dapat dicuci jika menghabiskan 120 air galon?



AMAZING PERSON



Sumber: wikipedia.org

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Matematikawan dan Filsuf

René Descartes merupakan seorang filsuf dan matematikawan Prancis. Karyanya yang terpenting adalah *Discours de la méthode* (1637) dan *Meditationes de prima Philosophia* (1641).

Descartes dikenal sebagai "Penemu Filsafat Modern" dan "Bapak Matematika Modern". Ia merupakan salah satu pemikir paling penting dan berpengaruh dalam sejarah barat modern. Ia berpendapat bahwa semuanya tidak ada yang pasti, kecuali kenyataan bahwa seseorang bisa berpikir.

Descartes terkenal dengan kalimat Latinnya yang berbunyi "*cogito ergo sum*" atau dalam bahasa Prancis berbunyi "*Je pense donc je suis*". Keduanya berarti "Aku berpikir maka aku ada". (Bahasa Inggris: "*I think, therefore I am*").

Meski paling dikenal karena karya-karya filosofinya, dia juga telah terkenal sebagai pencipta sistem koordinat Kartesius yang memengaruhi perkembangan kalkulus modern.



Keajaiban Al Quran

TED KEMA

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

RESEARCH

[illegible]

2. Melukis Grafik Fungsi Kuadrat

Marilah ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan fungsi linear? Fungsi ini telah kamu pelajari ketika SMP. Sekarang, kamu akan mempelajari fungsi lain, yaitu fungsi kuadrat. Fungsi kuadrat merupakan suatu fungsi yang pangkat tertinggi variabelnya adalah dua.

Secara umum, fungsi kuadrat dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ dengan } a, b, \text{ dan } c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Untuk memahami fungsi kuadrat, perhatikan beberapa bentuk fungsi berikut ini.

- (i) $f(x) = x - 2$
- (ii) $f(x) = x^2$
- (iii) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- (iv) $f(x) = 3 + 2p - p^2$
- (v) $f(x) = r^3 - r^2 + 1$

Fungsi (i) merupakan fungsi linear karena pangkat variabel tertingginya adalah 1. Fungsi (ii), (iii), dan (iv) merupakan contoh fungsi kuadrat. Fungsi (ii) dan (iii) dinamakan fungsi kuadrat dalam x karena variabelnya x . Adapun fungsi (iv) dinamakan fungsi kuadrat dalam p karena variabelnya p . Fungsi (v) bukan merupakan fungsi kuadrat karena pangkat tertinggi variabelnya adalah 3. Coba kamu cari tahu, disebut apakah fungsi (v)?

Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola. Parabola ini dapat terbuka ke atas atau ke bawah bergantung pada koefisien x^2 nya.

a. Grafik Fungsi Kuadrat dengan Domain Menggunakan Interval

Terdapat beberapa langkah yang perlu dilakukan untuk menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat dengan domain menggunakan interval, yaitu sebagai berikut.

- (1) Tentukan titik-titik koordinat pada grafik fungsi f dengan x adalah domain dari fungsi f .
- (2) Gambarlah titik-titik koordinat pada grafik yang diperoleh pada Langkah 1 ke dalam koordinat kartesius.
- (3) Hubungkan titik-titik koordinat yang telah digambarkan pada Langkah 2 dengan menggunakan kurva mulus.

INFO MATEMATIKA

<http://en.wikipedia.org>

Situs ini merupakan ensiklopedia bebas yang dapat diakses oleh siapa saja. Tidak hanya matematika, situs ini juga memuat penjelasan mengenai berbagai disiplin ilmu yang lain. Situs ini berbahasa Inggris sehingga selain dapat menambah pengetahuannya, situs ini juga dapat melatih kemampuannya dalam berbahasa Inggris. Pada situs ini, kamu tinggal mengetik kata kunci materi yang ingin kamu ketahui (dalam bahasa Inggris), kemudian klik **Go**.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah gambar grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 3$, dengan domain $D = \{x \mid -2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$?

Jawab:

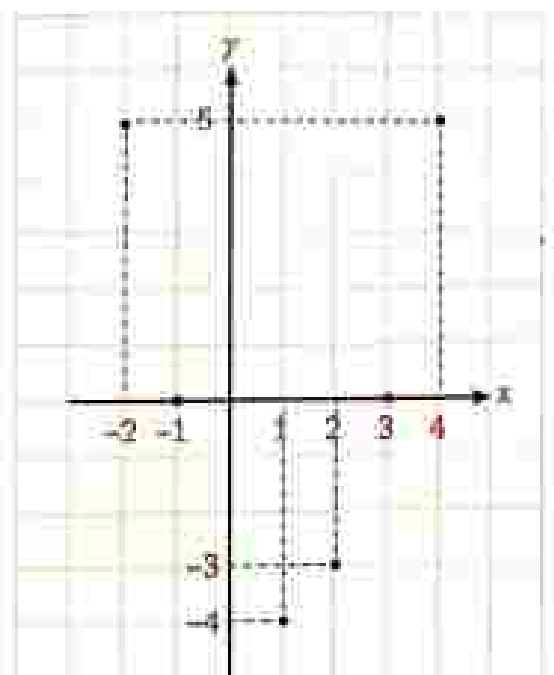
Langkah 1:

Titik-titik koordinat yang terletak pada fungsi f disajikan dalam tabel berikut.

x	$x^2 - 2x - 3$	$f(x) = y$	(x, y)
-2	$(-2)^2 - 2(-2) - 3$	5	$(-2, 5)$
-1	$(-1)^2 - 2(-1) - 3$	0	$(-1, 0)$
0	$0^2 - 2(0) - 3$	-3	$(0, -3)$
1	$1^2 - 2(1) - 3$	-4	$(1, -4)$
2	$2^2 - 2(2) - 3$	-3	$(2, -3)$
3	$3^2 - 2(3) - 3$	0	$(3, 0)$
4	$4^2 - 2(4) - 3$	5	$(4, 5)$

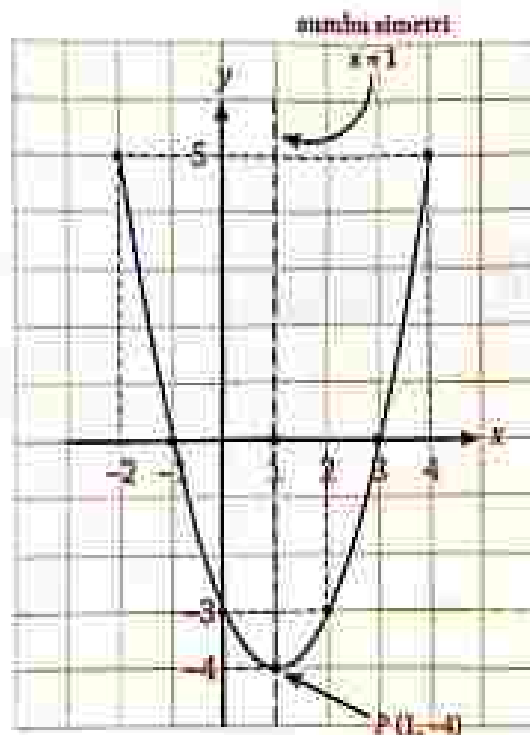
Langkah 2:

Gambarkan titik-titik yang diperoleh Langkah 1 pada koordinat kartesius seperti pada gambar berikut.



Langkah 3:

Hubungkan titik-titik yang diperoleh pada Langkah 2 sehingga membentuk parabola seperti gambar berikut.



Notes

Parabola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ membuka ke atas jika nilai $a > 0$.

Dari grafik $f(x) = x^2 - 2x - 3$ di atas, dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu sebagai berikut.

1. Daerah asal (domain) fungsi f adalah $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$.
2. Grafik memotong sumbu- x di $(-1, 0)$ dan $(3, 0)$ sehingga $x = -1$ dan $x = 3$ disebut pembuat nol.
3. Persamaan sumbu simetri (setangkep) dari $f(x) = x^2 - 2x - 3$ mempunyai persamaan $x = 1$.
4. Pada grafik, terlihat bahwa pada daerah asal $x = -2$ sampai dengan $x = 1$, nilai fungsi mengalami penurunan. Akan tetapi, pada daerah asal $x = 1$ sampai $x = 4$, nilai fungsi mengalami kenaikan. Grafik mengalami perubahan dari turun ke naik pada titik $P(1, -4)$. Titik P ini disebut dengan titik puncak parabola. Titik P merupakan titik terendah pada grafik sehingga titik P disebut dengan titik minimum. Ordinat (nilai y) dari titik minimum tersebut dinamakan nilai minimum. Jadi nilai minimum grafik di atas adalah -4 pada saat $x = 1$.
5. Daerah hasil (range) fungsi f adalah $R_f = \{y \mid -4 \leq y \leq 5, y \in \mathbb{R}\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah gambar grafik fungsi $f(x) = 5 + 4x - x^2$ dengan domain $D = \{x \mid -2 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{R}\}$?

Jawab:

Langkah 1:

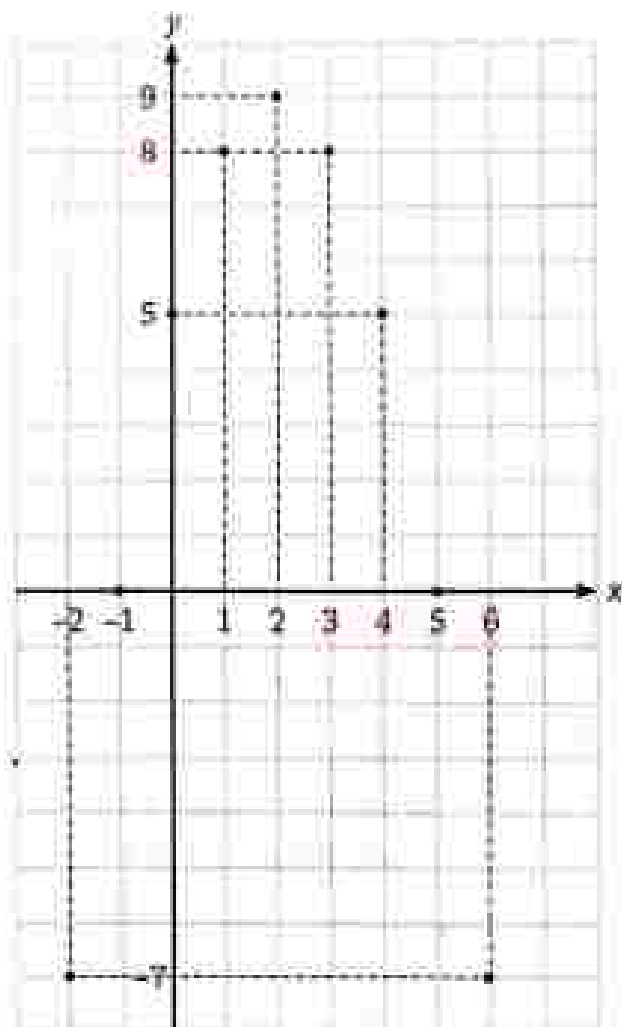
Titik-titik koordinat yang terletak pada fungsi f disajikan dalam tabel berikut.

x	$5 + 4x - x^2$	$f(x) = y$	(x, y)
-2	$5 + 4(-2) - (-2)^2$	-7	$(-2, -7)$
-1	$5 + 4(-1) - (-1)^2$	0	$(-1, 0)$
0	$5 + 4(0) - 0^2$	5	$(0, 5)$
1	$5 + 4(1) - 1^2$	8	$(1, 8)$
2	$5 + 4(2) - 2^2$	9	$(2, 9)$
3	$5 + 4(3) - 3^2$	8	$(3, 8)$
4	$5 + 4(4) - 4^2$	5	$(4, 5)$
5	$5 + 4(5) - 5^2$	0	$(5, 0)$
6	$5 + 4(6) - 6^2$	-7	$(6, -7)$

Langkah 2:

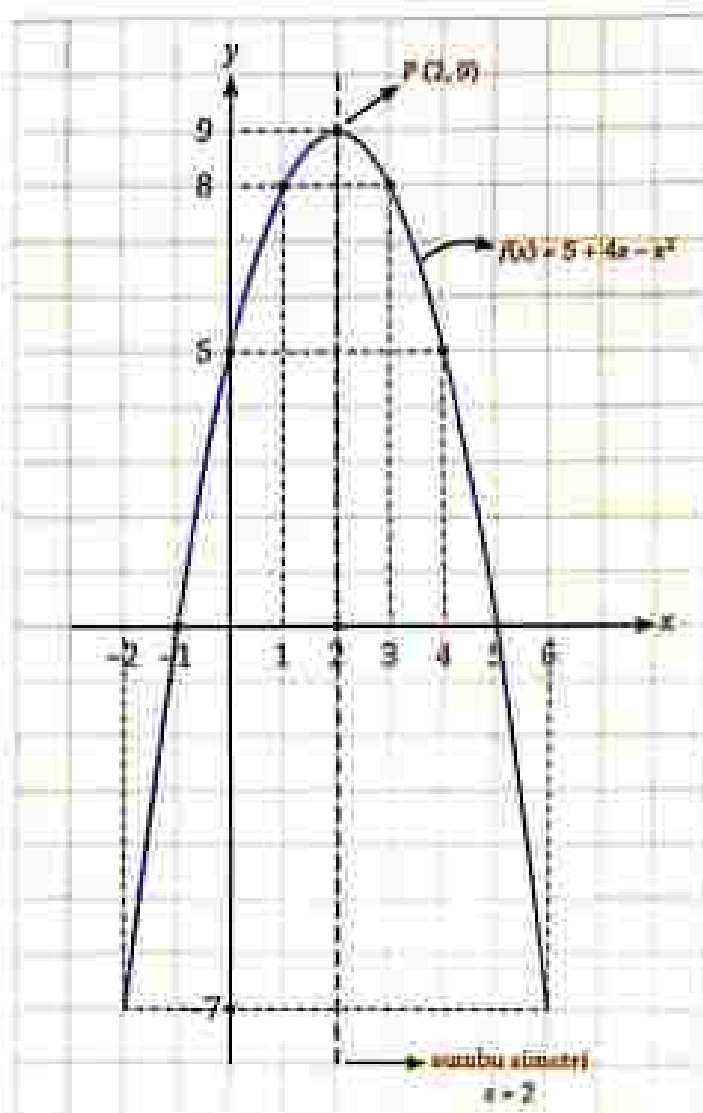
Gambarkan titik-titik yang diperoleh

Langkah 1 pada koordinat cartesian seperti gambar di samping.



Langkah 3:

Hubungkan titik-titik yang telah diperoleh pada **Langkah 2** sehingga membentuk parabola seperti pada gambar berikut.



Notes

Parabola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ membuka ke bawah jika nilai $a < 0$.

Dari grafik $5 + 4x - x^2$ di atas, dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu sebagai berikut.

1. Daerah asal (domain) fungsi f adalah $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 6, x \in R\}$.
2. Grafik memotong sumbu- x di $(-1, 0)$ dan $(5, 0)$ sehingga $x = -1$ dan $x = 5$ disebut pembuat nol.
3. Persamaan sumbu simetri (setangkep) dari $f(x) = 5 + 4x - x^2$ mempunyai persamaan $x = 2$.
4. Pada grafik, terlihat bahwa pada daerah asal $x = -2$ sampai $x = 2$, nilai fungsi mengalami kenaikan. Akan tetapi, pada daerah asal $x = 2$ sampai $x = 6$, nilai fungsi mengalami penurunan. Grafik mengalami perubahan dari naik ke turun pada titik $P(2, 9)$. Titik P ini disebut dengan titik puncak parabola. Titik P merupakan titik tertinggi pada grafik sehingga titik P disebut dengan titik maksimum. Ordinat (nilai y) dari titik tersebut dinamakan nilai maksimum. Jadi, nilai maksimum grafik di atas adalah 9 pada saat $x = 2$.
5. Daerah hasil (range) fungsi f adalah $R_f = \{y \mid -7 \leq y \leq 9, y \in R\}$.

b. Grafik Fungsi Kuadrat Secara Umum

Untuk menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ secara umum, kamu dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut.

1. Tentukan titik potong terhadap sumbu- x dengan syarat $y = 0$.
2. Tentukan titik potong terhadap sumbu- y dengan syarat $x = 0$.
3. Tentukan diskriminan ($D = b^2 - 4ac$).
 - a. Jika $b^2 - 4ac > 0$ maka grafik fungsi f memotong sumbu- x di dua titik yang berlainan.
 - b. Jika $b^2 - 4ac = 0$ maka grafik fungsi f memotong sumbu- x di dua titik yang sama atau dikatakan menyinggung sumbu- x .
 - c. Jika $b^2 - 4ac < 0$ maka grafik fungsi f tidak memotong maupun menyinggung sumbu- x .

4. Tentukan persamaan sumbu simetri, yaitu $x = \frac{-b}{2a}$.

Sumbu simetri adalah sebuah garis yang membagi parabola menjadi dua bagian yang sama.

5. Tentukan nilai maksimum/minimum, yaitu $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$.

Cara lain: nilai maksimum/minimum dapat dicari dengan mensubstitusikan

sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$ ke dalam fungsi kuadrat.

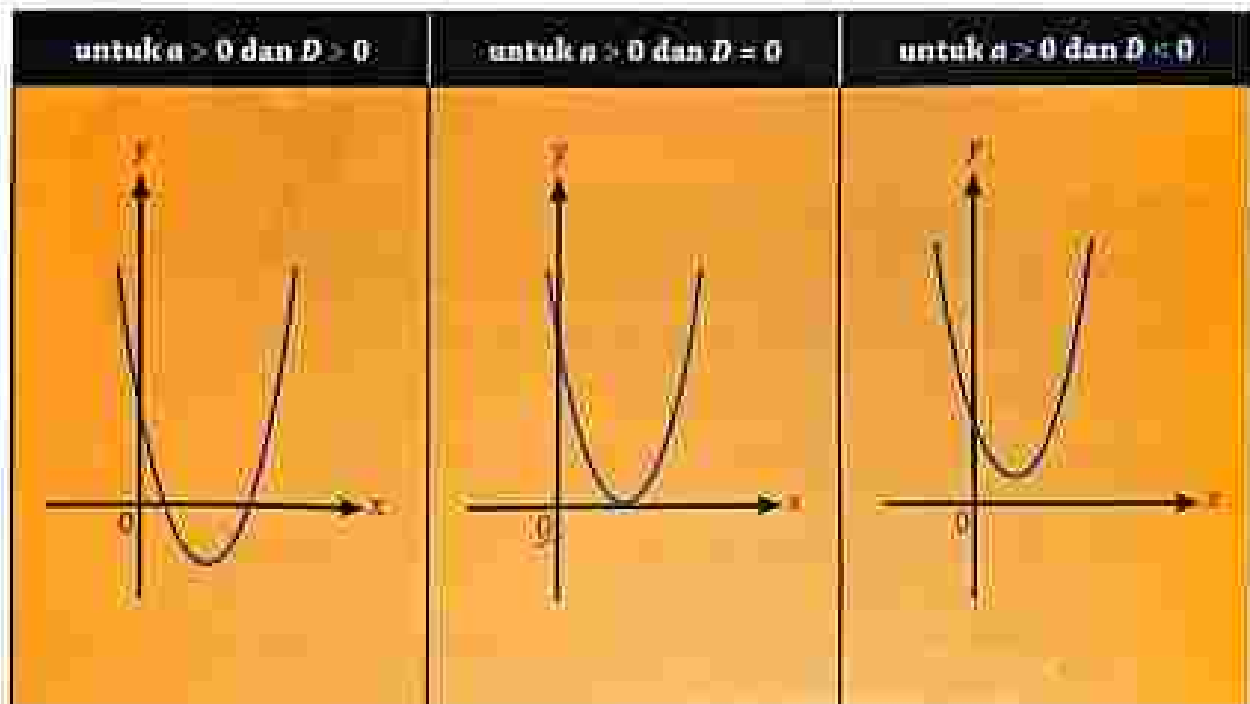
6. Tentukan titik puncak parabola dan persamaan sumbu simetri.

Koordinat titik puncak = (sumbu simetri, nilai maksimum/minimum)

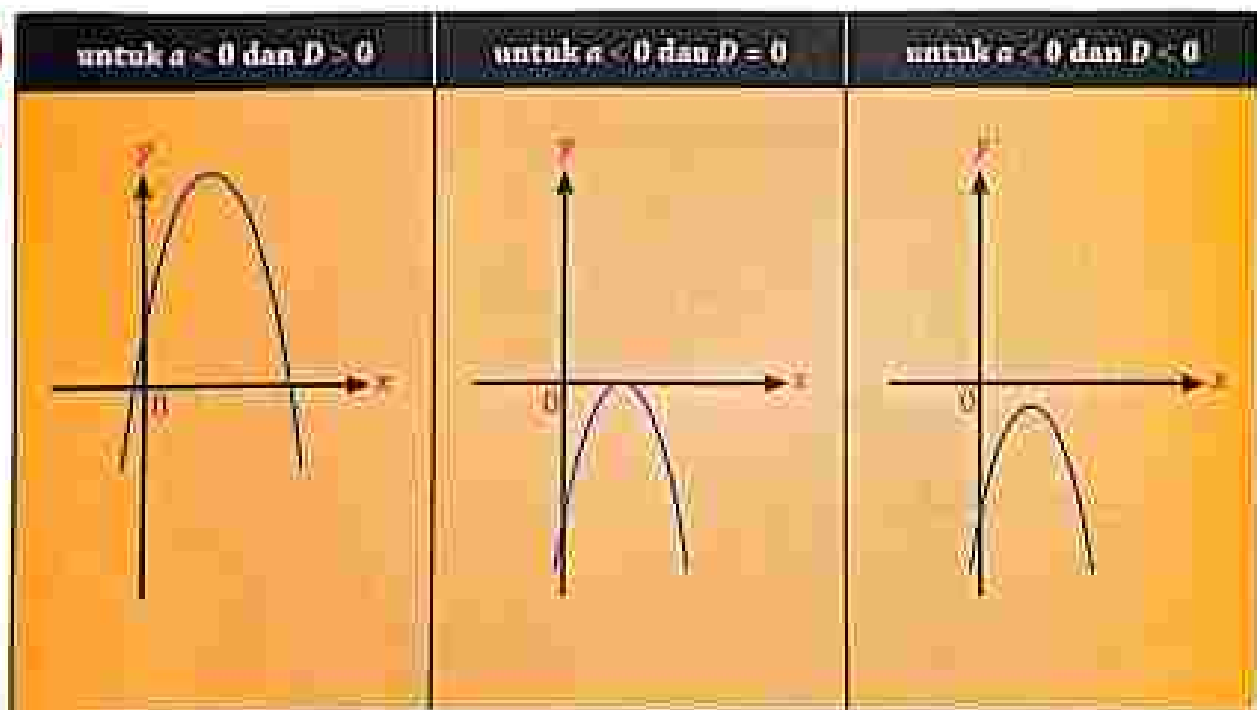
$$= \left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \right)$$

7. Untuk mempermudah grafik, tentukan titik-titik bantu.

Sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ berdasarkan nilai diskriminan (D) dan a adalah sebagai berikut.



Untuk nilai $a > 0$ dan $D < 0$, parabola berada di atas sumbu- x untuk setiap x anggota bilangan riil. Dengan demikian, nilai $y = ax^2 + bx + c > 0$. Fungsi yang demikian disebut **definit positif**.



Untuk $a < 0$ dan $D < 0$, parabola selalu berada di bawah sumbu- x untuk setiap x anggota bilangan riil. Dengan demikian, nilai $y = ax^2 + bx + c < 0$. Fungsi yang demikian disebut dengan **definit negatif**.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Bagaimanakah gambar sketsa grafiknya?

Jawab:

Pada fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 3$ diperoleh $a = 1$, $b = 4$, dan $c = 3$.

Oleh karena $a > 0$, grafik berbentuk parabola yang terbuka ke atas sehingga mempunyai titik minimum.

1. Menentukan titik potong terhadap sumbu- x , syaratnya: $y = 0$.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 3)(x + 1) = 0$$

$$x = -3 \text{ atau } x = -1$$

Jadi, grafik memotong sumbu- x di titik $(-3, 0)$ dan $(-1, 0)$.

2. Menentukan titik potong terhadap sumbu- y , syaratnya: $x = 0$.

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 \rightarrow f(x) = 0^2 + 4(0) + 3 = 3$$

Jadi, grafik memotong sumbu- y di titik $(0, 3)$.

3. Menentukan nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$; $D > 0$.

Jadi, grafik memotong sumbu- x di dua titik yang berbeda.

4. Menentukan persamaan sumbu simetri, $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$

5. Menentukan nilai minimum, $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{4^2 - 4 \cdot (1) \cdot (3)}{(-4) \cdot (1)} = \frac{16 - 12}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$.

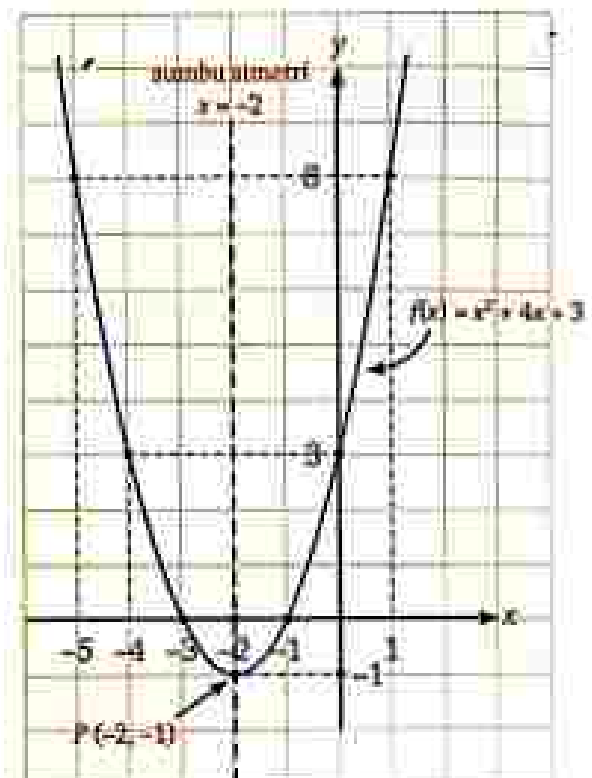
6. Menentukan titik puncak parabola = $(-2, -1)$.

7. Menentukan titik-titik bantu.

Untuk lebih memperjelas dan memperhalus grafik maka diberikan beberapa titik bantu seperti disajikan pada tabel berikut.

x	-5	-4	-1
$y = f(x)$	8	3	6

Sketsa grafik fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 3$ disajikan pada gambar di samping.



Tanya:

Bagaimanakah cara menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$?

Jawab:

Pada fungsi $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$ diperoleh $a = -2$, $b = 8$, dan $c = -9$.

Oleh karena $a < 0$, grafik berbentuk parabola yang terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik maksimum.

1. Menentukan titik potong terhadap sumbu- x , syaratnya: $y = 0$.

$$-2x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = 64 - 72 = -8 \rightarrow D < 0$$

Jadi, grafik tidak memotong sumbu- x .

2. Menentukan titik potong terhadap sumbu- y , syaratnya: $x = 0$.

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 9 \rightarrow f(x) = (-2)(0)^2 + 8(0) - 9 = -9$$

Jadi, grafik memotong sumbu- y di titik $(0, -9)$.

3. Menentukan persamaan sumbu simetri, $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$.

4. Menentukan nilai maksimum, $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9)}{(-4) \cdot (-2)} = \frac{64 - 72}{8} = \frac{-8}{8} = -1$.

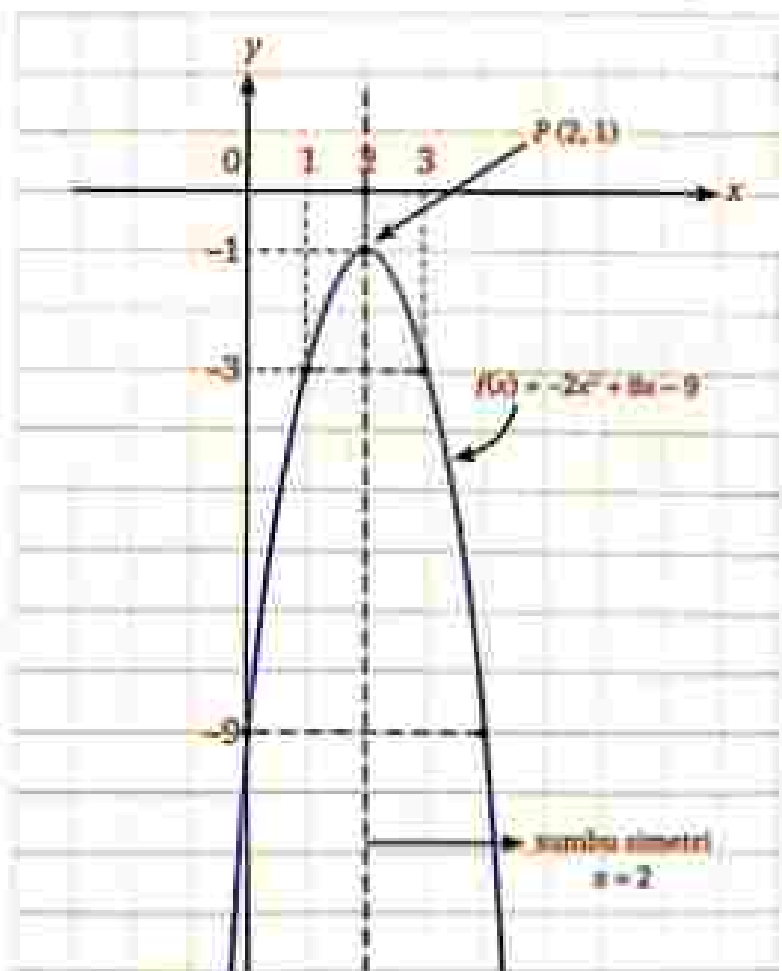
5. Menentukan titik puncak parabola $= (2, -1)$.

6. Menentukan titik-titik bantu

Untuk lebih memperjelas dan memperhalus grafik maka diberikan beberapa titik bantu seperti disajikan pada tabel berikut.

x	1	3	4
$y = f(x)$	-3	-3	-9

Sketsa grafik fungsi $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$ disajikan pada gambar di samping.



Tanya:

Bagaimana cara menggambar sketsa grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 6x + 9$?

Jawab:

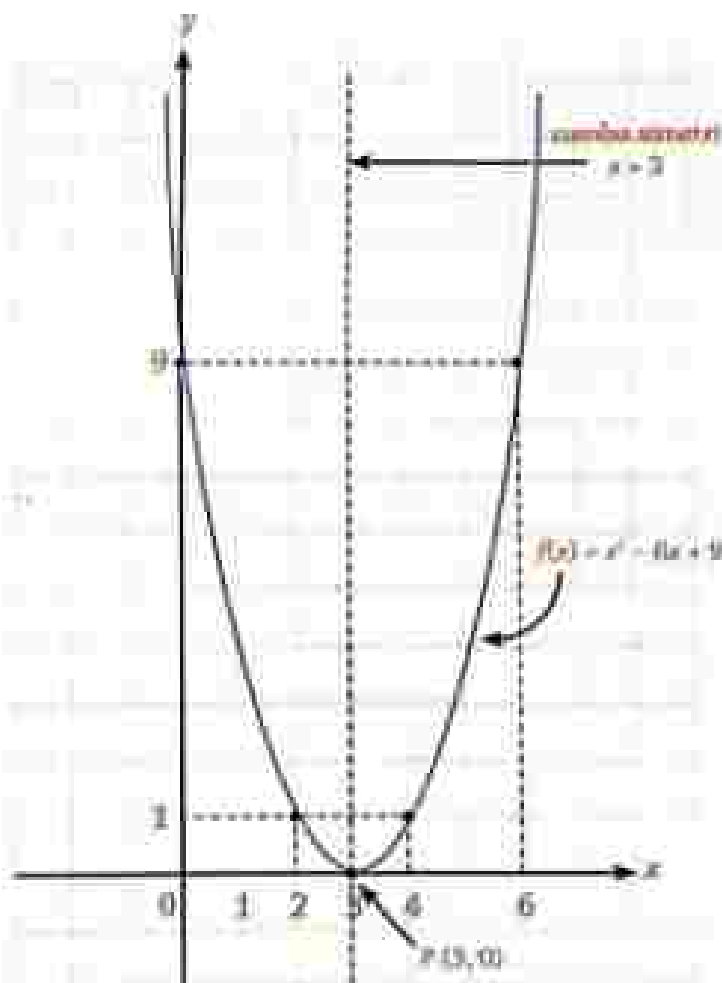
Pada fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 9$ diperoleh $a = 1$, $b = -6$, dan $c = 9$.

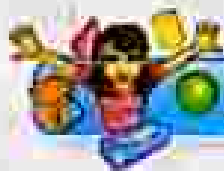
Oleh karena $a > 0$, grafik berbentuk parabola yang terbuka ke atas sehingga mempunyai titik minimum.

1. Menentukan titik potong terhadap sumbu- x , $y = 0$.
 $x^2 - 6x + 9 = 0$ faktorkan menjadi $(x - 3)(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3$.
Jadi, grafik memotong sumbu- x di titik $(3, 0)$.
2. Menentukan titik potong terhadap sumbu- y , $x = 0$.
 $f(x) = x^2 - 6x + 9 \rightarrow f(x) = (0)^2 - 6(0) + 9 = 9$
Jadi, grafik memotong sumbu- y di titik $(0, 9)$.
3. Menentukan nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0 \rightarrow$ Jadi, grafik menyinggung sumbu- x .
4. Menentukan persamaan sumbu simetri, $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$.
5. Menentukan nilai minimum, $y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{(-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}{(-4) \cdot (1)} = \frac{36 - 36}{-4} = 0$.
6. Menentukan titik puncak parabola = $(3, 0)$.
7. Menentukan titik-titik bantu.
Untuk lebih memperjelas dan memperhalus grafik maka diberikan beberapa titik bantu seperti disajikan pada tabel berikut.

x	2	4	6
$y = f(x)$	1	1	9

Sketsa grafik fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 9$ disajikan pada gambar di samping.





Sumber: unsat.unism.ac.id/~66/rainbow.jpg

Pelangi adalah gejala optik dan meteorologi yang menghasilkan spektrum dari cahaya yang (hampir) kontinu untuk muncul di langit ketika Matahari berinteraksi atas titik air hujan yang jatuh. Bentuk pelangi menyerupai parabola.

Berkas adalah kata pelangi dalam beberapa bahasa:

Belanda: Regenbogen

Inggris: Rainbow

Spanyol: Arco iris

Prancis: Arc en ciel

Italia: arcobaleno

ASAHI OTAK MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI KUADRAT

1. Diketahui fungsi $f(x) = 6x - x^2$ dengan daerah asal $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{R}\}$. Tentukan:
 - a. gambar sketsa grafiknya,
 - b. range fungsi f ,
 - c. pembuat nol fungsi f ,
 - d. persamaan sumbu simetri,
 - e. titik puncak parabola, dan
 - f. nilai maksimum fungsi f .
2. Bagaimana menggambar sketsa setiap fungsi kuadrat berikut?
 - a. $f(x) = x^2 - x - 12$
 - b. $f(x) = -2x^2 - x + 6$
 - c. $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
 - d. $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$
 - e. $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$
 - f. $f(x) = -x^2 + 4x + 4$

c. Kedudukan Garis Terhadap Grafik Fungsi Kuadrat

Diskriminan dapat juga digunakan untuk menentukan kedudukan garis terhadap parabola.

Misalnya, diketahui garis $g: y = mx + n$ dan sebuah fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Kedudukan garis g terhadap parabola fungsi kuadrat $f(x)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$y = mx + n \quad (\text{bentuk umum persamaan garis, substitusikan } y \text{ ke fungsi kuadrat})$$

$$mx + n = ax^2 + bx + c \quad (\text{ubah ruas kanan menjadi 0})$$

$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0 \quad (\text{persamaan kuadrat})$$

$$\begin{aligned} \text{Tentukan diskriminan persamaan kuadrat } ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0, \text{ yaitu } D &= b^2 - 4ac \\ &= (b - m)^2 - 4a(c - n) \end{aligned}$$

Kedudukan garis g terhadap parabola fungsi kuadrat $f(x)$ berdasarkan diskriminannya adalah sebagai berikut.

1. Jika $D > 0$ maka garis g memotong parabola di dua titik berbeda.
2. Jika $D = 0$ maka garis g menyinggung parabola.
3. Jika $D < 0$ maka garis g tidak memotong/menyinggung parabola.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah batas-batas nilai k agar grafik fungsi $f(x) = x^2 + kx + 1$ memotong sumbu- x di dua titik yang berbeda.

Jawab:

Pada fungsi $f(x) = x^2 + kx + 1$ diperoleh $a = 1$, $b = k$, dan $c = 1$. Selain itu, fungsi tersebut juga memotong sumbu- x di dua titik yang berbeda.

Syaratnya:

$$D > 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$(k)^2 - 4(1)(1) > 0$$

$$k^2 - 4 > 0$$



Jadi, batas nilai k adalah $k < -2$ atau $k > 2$.

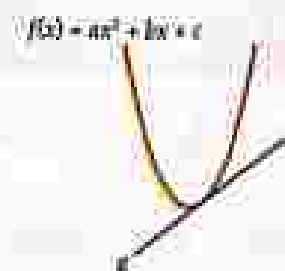
Notes

Kedudukan garis g terhadap grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah sebagai berikut.

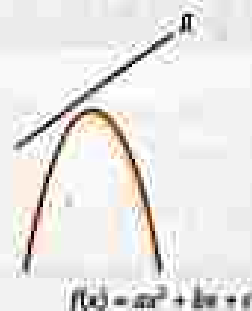
memotong parabola
di dua titik



menyinggung parabola



tidak memotong
dan menyinggung parabola



TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai n jika garis $y = x + n$ menyinggung parabola $y = 2x^2 + 3x - 5$?

Jawab:

$$y = x + n$$

(substitusikan y ke fungsi kuadrat)

$$x + n = 2x^2 + 3x - 5$$

(ubah ruas kanan menjadi 0)

$$2x^2 + 2x - (5 + n) = 0$$

(persamaan kuadrat dengan $a = 2$, $b = 2$, dan $c = -(5 + n)$)

Syarat suatu garis menyinggung parabola adalah

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2)^2 - 4(2)(-(5 + n)) = 0$$

$$4 + 40 + 8n = 0$$

$$8n = 44$$

$$n = 5,5$$

Jadi, $y = x + n$ akan menyinggung parabola $y = 2x^2 + 3x - 5$ jika nilai $n = 5,5$.

Tanya:

Tentukan batas-batas nilai m agar grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 - 2mx - m$ selalu berada di bawah sumbu- x untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Jawab:

Pada fungsi $f(x) = -x^2 - 2mx - m$ diperoleh $a = -1$, $b = -2m$, dan $c = -m$. $a < 0$.

Fungsi $f(x)$ selalu berada di bawah sumbu X jika $-x^2 - 2mx - m < 0$ (definit negatif).

Syarat definit negatif $a < 0$ dan $D < 0$:

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$(-2m)^2 - 4(-1)(-m) < 0$$

$$4m^2 - 4m < 0$$

$$4m(m - 1) < 0$$



Jadi, batas nilai adalah ada $0 < m < 1$.

ASAHI OTAK KEDUDUKAN GRAFIK FUNGSI KUADRAT

1. Carilah batas-batas nilai p agar grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{2}px^2 - 2px + \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\right)$ menyinggung sumbu- x .
2. Agar garis $y = 2px - 1$ memotong parabola $y = x^2 - x + 3$ di dua titik, berapakah nilai p ?
3. Carilah batas-batas nilai t agar grafik fungsi kuadrat $f(x) = (t + 2)x^2 + 2tx + (t - 1)$ selalu berada di atas sumbu- x .

3. Menyusun Fungsi Kuadrat

Untuk membentuk fungsi kuadrat, digunakan beberapa persamaan bergantung dari apa yang diketahui. Beberapa persamaan itu adalah sebagai berikut.

- a. Jika grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- x di $A(x_1, 0)$ dan $B(x_2, 0)$, serta melalui sebuah titik tertentu maka persamaannya adalah

$$f(x) = y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- b. Jika grafik fungsi kuadrat melalui titik puncak $P(x_p, y_p)$ serta melalui sebuah titik tertentu maka persamaannya adalah

$$f(x) = y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

- c. Jika grafik fungsi kuadrat melalui $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ maka persamaannya adalah

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

LANYA & JAWAB

Tanya:

Sebuah grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- x di $P(-2, 0)$ dan $Q(3, 0)$.

Jika fungsi kuadrat tersebut melalui titik $(-1, -8)$, bagaimanakah bentuk persamaan fungsi kuadratnya?

Jawab:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Oleh karena memotong sumbu- x di $P(-2, 0)$ dan $Q(3, 0)$ maka

$$y = a[x - (-2)](x - 3)$$

$$y = a(x^2 - x - 6)$$

Fungsi kuadrat tersebut melalui titik $(-1, -8)$ sehingga

$$-8 = a[(-1)^2 - (-1) - 6]$$

$$-8 = -4a$$

$$a = 2$$

Jadi, fungsi kuadratnya adalah $f(x) = y = 2(x + 2)(x - 3) = 2x^2 - 2x - 12$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Sebuah grafik fungsi kuadrat mempunyai titik minimum $(-3, 0)$. Bagaimanakah bentuk persamaan fungsi kuadrat tersebut jika fungsi kuadrat tersebut melalui titik $(-5, 4)$?

Jawab:

$$f(x) = y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Grafik fungsi kuadrat mempunyai titik minimum $(-3, 0) \rightarrow y = a(x - (-3))^2 + 0$

dan melalui titik $(-5, 4) \rightarrow 4 = a[-5 - (-3)]^2 + 0 \rightarrow 4 = 4a \rightarrow a = 1$

Jadi, fungsi kuadratnya adalah $f(x) = y = (1)(x + 3)^2 + 0 = x^2 + 6x + 9$

Tanya:

Tentukan fungsi kuadrat dari parabola di samping.

Jawab:

Grafik di samping menunjukkan bahwa parabola mempunyai titik puncak $(-2, -1)$ serta melalui titik pusat.

$$f(x) = y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

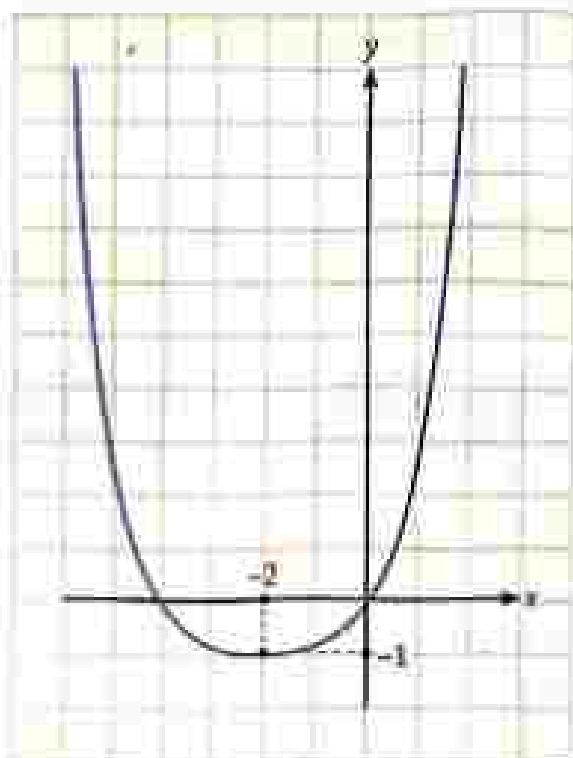
titik minimum $(-2, -1) \rightarrow y = a(x - (-2))^2 - 1$

melalui titik $(0, 0) \rightarrow 0 = a[0 - (-2)]^2 - 1 \rightarrow 1$

$$= 4a \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = y = \left(\frac{1}{4}\right)(x + 2)^2 - 1 = \left(\frac{1}{4}\right)(x^2 + 4x + 4) - 1$$

Jadi, fungsi kuadratnya adalah $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$.



ASAHI OTAK MENYUSUN FUNGSI KUADRAT

1. Diketahui nilai minimum suatu fungsi kuadrat sama dengan 3 yang diperoleh untuk $x = 2$. Selain itu, fungsi kuadrat tersebut bernilai 4 untuk $x = 1$. Bagaimanakah fungsi kuadratnya?
2. Grafik suatu fungsi kuadrat berada di bawah sumbu x pada interval $-2 < x < 5$. Grafik fungsi kuadrat tersebut melalui titik potong garis $y = x + 11$ dan $x + y = 5$. Bagaimanakah fungsi kuadratnya?

4. Menerapkan Fungsi Kuadrat

Pemakaian fungsi kuadrat dalam kehidupan sehari-hari berhubungan dengan permasalahan yang menggunakan kata-kata bermakna maksimum ataupun minimum. Kata-kata tersebut antara lain terjauh, terpanjang, terbesar, terkecil, terendah, dan terdekat.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Seutas tali yang panjangnya 60 cm akan dibuat menjadi sebuah segitiga siku-siku. Jika panjang sisi miringnya adalah 25 cm, berapakah luas segitiga tersebut?

Jawab:

Keliling segitiga : $x + y + 25 = 60$

$$x + y = 35 \rightarrow y = 35 - x \quad \dots (1)$$

Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$x^2 + y^2 = 25^2$$

Substitusikan $y = 35 - x$ diperoleh

$$x^2 + (35 - x)^2 = 625$$

$$x^2 + 1.225 - 70x + x^2 = 625$$

$$2x^2 - 70x + 600 = 0$$

$$x^2 - 35x + 300 = 0 \quad (\text{kedua ruas dibagi 2})$$

$$(x - 15)(x - 20) = 0$$

$$x = 15 \text{ atau } x = 20$$

Untuk $x = 15$ maka $y = 35 - 15 = 20$

Untuk $x = 20$ maka $y = 35 - 20 = 15$

$$\begin{aligned} \text{Luas segitiga} &= \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} \\ &= \frac{1}{2} \times 20 \times 15 = 150 \end{aligned}$$

Jadi, luas segitiga tersebut adalah 150 cm².



Tanya:

Ali mempunyai kandang berbentuk persegi panjang yang salah satu sisinya dibatasi oleh gudang. Ia ingin memagari kandang tersebut kecuali sisi yang dibatasi gudang. Berapakah luas maksimum kandang yang dapat dipagari kawat duri tersebut jika ia memiliki 200 meter kawat duri untuk memagari kandang tersebut?

Jawab:

Misalkan, lebar kandang dinyatakan dengan x .

Dengan demikian, panjang kandang adalah $200 - 2x$ sehingga

$$L = x(200 - 2x) = -2x^2 + 200x$$

$$L_{\text{maks}} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{200^2 - 4(-2)(0)}{-4(-2)} = \frac{40.000}{8} = 5.000$$

Jadi, luas maksimum kandang yang dapat dipagari kawat duri tersebut adalah 5.000 m².



MATH AROUND US



Gambar 1.1.1. Pabrik Garmen

Sebuah pabrik garmen memproduksi 2.000 unit barang setiap hari. Untuk memenuhi permintaan pasar, pabrik tersebut memproduksi barang sebanyak 5.000 unit setiap hari. Berapa banyak unit barang yang harus diproduksi setiap hari agar permintaan pasar terpenuhi?

Diketahui: $x = 2.000$ unit barang yang diproduksi setiap hari.
Barang yang harus diproduksi setiap hari adalah:

$$[x - 2.000] = 5.000 \text{ unit}$$

$$\text{Berapa banyak unit barang} = \frac{10}{20} = \frac{10.000}{20} = 1.000$$

Jadi, berapa produksi per unit yang paling rendah tercapai jika banyaknya unit barang yang diproduksi tiap hari adalah **1.000 unit**.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Misal x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 - ax + 2a + 1 = 0$.

Jika $z = x_1^2 + x_2^2$, berapakah nilai a agar nilai z minimum?

Jawab:

Pada fungsi $x^2 - ax + 2a + 1 = 0$ diperoleh $a = 1$, $b = -a$, dan $c = 2a + 1$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-a)}{1} = a \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2a+1}{1} = 2a+1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$z = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$z = a^2 - 2(2a + 1)$$

$$z = a^2 - 4a - 2 \quad (\text{persamaan kuadrat dalam } a)$$

$$\text{Jadi, } z \text{ minimum dicapai pada } a = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

Tanya:

Seseorang melakukan perjalanan yang berjarak 196 km dengan menggunakan kereta dan kembali dengan mobil dengan kecepatan 21 km/jam lebih cepat dari kereta. Jika total waktu yang dihabiskan dalam perjalanan tersebut adalah 11 jam, berapakah masing-masing kecepatan kereta dan mobil?

Jawab:

Misalkan, kecepatan kereta x km/jam.

Artinya, kecepatan mobil $(x + 21)$ km/jam.

$$\text{Waktu perjalanan dengan kereta} = \frac{196}{x} \text{ jam dan dengan mobil} = \frac{196}{x+21} \text{ jam.}$$

Oleh karena waktu total yang dihabiskan 11 jam maka

$$\frac{196}{x} + \frac{196}{x+21} = 11$$

$$\frac{196(x+21) + 196x}{x(x+21)} = 11 \quad (\text{samakan penyebut})$$

$$196x + 4.116 + 196x = 11x^2 + 231x$$

$$11x^2 - 161x - 4.116 = 0$$

$$(x-28)(11x+147) = 0$$

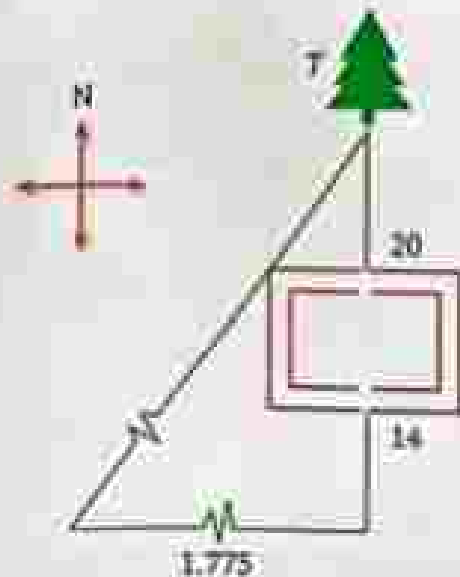
$$x = 28 \text{ atau } x = \frac{147}{11} \longrightarrow \text{kecepatan tidak mungkin negatif}$$

Jadi, kecepatan kereta adalah 28 km/jam dan mobil adalah $(28 + 21) = 49$ km/jam.

LET'S DO IT



Pemecahan permasalahan yang berhubungan dengan fungsi kuadrat telah ditemukan dalam buku "Jiu Zhang Sun Shu" yang merupakan salah satu buku matematika cina kuno yang terkenal. Gambar berikut menunjukkan salah satu permasalahan yang ada dalam buku tersebut.



Gambar di samping menunjukkan halaman berbentuk persegi dengan ukuran belum diketahui dan memiliki dua pintu yang terletak pada dinding selatan dan utara. Pintu-pintu tersebut terletak di tengah dinding. Jika kita berjalan keluar dari pintu utara sejauh 20 langkah maka kita mencapai sebuah pohon T. Jika kita berjalan melalui pintu selatan sejauh 14 langkah dan belok ke barat sejauh 1.775 langkah maka pohon T akan terlihat seperti pada gambar.

Tentukan ukuran halaman dalam satuan langkah. Dapatkah kalian menggunakan persamaan kuadrat untuk menyelesaikan masalah ini?

ASAHI OTAK

PENERAPAN FUNGSI KUADRAT

1. Sebuah gambar berukuran (30×20) dm² dan dikelilingi oleh bingkai yang luasnya 104 dm². Berapakah lebar bingkai tersebut?
2. Diketahui jumlah dua bilangan sama dengan 10, sedangkan hasil kalinya sama dengan 25. Dapatkah kamu menentukan nilai kedua bilangan tersebut?
3. Diketahui fungsi biaya produksi total suatu perusahaan dinyatakan dengan persamaan $C = 5.000.000 - 1.800Q + 0,3 Q^2$ dengan Q merupakan banyaknya barang yang diproduksi. Berapakah banyaknya barang yang diproduksi jika perusahaan meminimumkan biaya produksi total?
4. Sebuah segitiga siku-siku mempunyai sisi-sisi yang panjangnya $(3x - 1)$ cm, $5x$ cm, dan $(5x + 2)$ cm. Berapa panjang sisi terpendek dan luas segitiga tersebut?



LET'S ACT

Dalam kehidupan sehari-hari, sebenarnya kamu sering dihadapkan suatu permasalahan yang secara tidak sadar berhubungan dengan bentuk persamaan dan fungsi kuadrat. Berikut disajikan beberapa permasalahan yang berkaitan dengan pokok bahasan yang telah kamu pelajari. Kerjakanlah bersama kelompok belajarmu.

Petunjuk:

1. Buatlah 4 kelompok yang terdiri atas 4-5 orang.
2. Setiap anggota kelompok menyelesaikan setiap permasalahan berikut (± 20 menit).
3. Diskusikan penyelesaian yang diperoleh setiap anggota kelompok (± 20 menit).
4. Setiap kelompok mempresentasikan penyelesaian satu permasalahan, misalnya kelompok 1 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 1, kelompok 2 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 2, dan seterusnya. Jika kelompok lain memiliki langkah penyelesaian yang berbeda untuk permasalahan yang sama maka kelompok tersebut juga mempresentasikan penyelesaiannya tersebut (± 40 menit).

Permasalahan 1:

Sel lembar karton persegi panjang akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara membuang bujur pangkar seluas (2×2) cm² di setiap pojoknya. Panjang bidang alas kotak 4 cm lebih besar dari lebarnya dan volume kotak tersebut adalah 90 cm³. Berapa ukuran panjang dan lebar kotak tersebut?

Permasalahan 2:

Diketahui biaya untuk memproduksi x buah radio setiap harinya adalah $\left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right)$ rupiah.

Jika setiap radio dijual dengan harga $\left(50 - \frac{1}{2}x\right)$ rupiah, agar diperoleh keuntungan maksimum, berapa banyak radio yang harus diproduksi setiap harinya?

Permasalahan 3:

Sekelompok siswa sepakat untuk membeli satu unit komputer seharga Rp6.120.000,00 dengan cara patungan (membagi rata pembayarannya). Setelah masing-masing membayar, mereka baru menyadari bahwa ada tiga temannya yang sebarusnya ikut bergabung. Jika ketiga ketiga orang tersebut ikut maka masing-masing akan membayar Rp340.000,00 kurang dari yang telah mereka bayar. Berapa banyak siswa yang berencana membeli komputer tersebut?



Permasalahan 4:

Seorang pengendara motor akan menempuh jarak 120 km. Jika ia menambah kecepatan rata-ratanya sebesar 10 km/jam maka ia akan sampai di tempat tujuan 36 menit lebih cepat. Berapakah kecepatan rata-rata pengendara motor yang sebenarnya?

INTI SARI All About "Kuadrat"

1. Bentuk umum persamaan kuadrat dalam x adalah $ax^2 + bx + c = 0$ di mana a , b , dan c anggota bilangan riil dan $a \neq 0$. a disebut koefisien x^2 , b disebut koefisien x , dan c disebut konstanta/tetapan.
2. Nilai-nilai x yang jika disubstitusikan ke dalam suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ menjadikan persamaan kuadrat itu bernilai benar dinamakan penyelesaian persamaan kuadrat atau akar-akar persamaan kuadrat. Terdapat beberapa cara untuk menentukan akar-akar penyelesaian suatu persamaan kuadrat, yaitu:
 - dengan memfaktorkan/faktorisasi,
 - dengan melengkapkan kuadrat sempurna, dan
 - dengan rumus kuadrat (rumus abc).
3. Berdasarkan nilai diskriminan ($D = b^2 - 4ac$), jenis-jenis akar suatu persamaan kuadrat dapat ditentukan sebagai berikut.
 - a. $D > 0$ maka kedua akar nyata dan berlainan
 - D bentuk kuadrat maka kedua akar nyata, berlainan, dan rasional
 - D bukan bentuk kuadrat maka kedua akar nyata, berlainan, dan irasional
 - b. $D = 0$ maka kedua akar nyata dan sama (kembar)
 - c. $D < 0$ maka kedua akar tidak nyata (tidak riil)
4. Misal x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
5. Fungsi atau pemetaan adalah relasi himpunan A ke himpunan B yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat pada satu anggota pada himpunan B .
6. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola. Parabola dapat terbuka ke atas atau ke bawah bergantung pada koefisien x^2 -nya.
7. Dengan menggunakan diskriminan, kedudukan suatu garis terhadap parabola dapat ditentukan, yaitu sebagai berikut.
 - a. Jika $D > 0$ maka garis memotong parabola di dua titik berbeda.
 - b. Jika $D = 0$ maka garis menyinggung parabola.
 - c. Jika $D < 0$ maka garis tidak memotong/menyinggung parabola.
8. Untuk membentuk fungsi kuadrat digunakan beberapa persamaan yang bergantung dari apa yang diketahui. Beberapa persamaan itu adalah sebagai berikut.
 - Jika grafik fungsi kuadrat memotong sumbu- x di $A(x_1, 0)$ dan $B(x_2, 0)$ serta melalui sebuah titik tertentu maka persamaannya adalah $f(x) = y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
 - Jika grafik fungsi kuadrat melalui titik puncak $P(x_p, y_p)$ serta melalui sebuah titik tertentu maka persamaannya adalah $f(x) = y = a(x - x_p)^2 + y_p$.
 - Jika grafik fungsi kuadrat melalui $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ maka persamaannya adalah $f(x) = y = ax^2 + bx + c$.

Muqadimah

Pada umumnya, setiap manusia senantiasa berpikir secara linear, lurus, dan sederhana. Artinya, sesuatu yang tampak kasat mata, senantiasa diartikan secara ragawi. Lain halnya dengan yang tidak terlihat pandangan mata. Tentu akan diartikan sebagai sesuatu yang gaib. Inilah pola pikir yang biasa terdapat pada masyarakat sekarang. Jika ada yang di atas, tentu sangat berbeda dengan yang di bawah. Bila ada yang di kanan, tentu sangat jauh dari yang di kiri. Jika ada yang pintar, tentu sangat berbeda dengan yang bodoh.

Dalam pandangan ke-Islaman, adanya dua hal berbeda tidak selalu diartikan sebagai sebuah pertentangan. Perbedaan terkadang juga diartikan sebagai pembagian peran semata, sebagaimana yang telah dicontohkan konsepnya oleh ajaran agama Islam tentang cara berinteraksi yang harus dilakukan oleh orang-orang beriman (*believers*) dalam kehidupan ini.

Untuk lebih jelasnya, mari kita lihat firman Allah Swt. dalam surat Ali Imran ayat 112 sebagai berikut. "Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia [*Dhuribat 'alaihum adz-dzillatu aynama tsuqifu illa bi habli min Allah wa habl min an-Nas*]."

Pada ayat di atas, Allah Swt. menjelaskan bahwa untuk meraih kesuksesan di dunia dan di akhirat, kaum muslimin harus dapat menjalin dan menjaga keharmonisan hubungan kita, sebagai makhluk, dengan Sang Pencipta, dan dengan sesama makhluk ciptaan-Nya.

Makna terdalam dari surat Ali Imran ayat 112 di atas bisa dijadikan pijakan yang kokoh dalam memahaminya. Yaitu, keharusan menjaga keseimbangan antara interaksi kemakhlukan dengan ketuhanan. Meskipun satu hal yang harus diingat bahwa yang mesti dijadikan sebagai pegangan utama adalah hubungan dengan Allah Swt.. Hal ini diperkuat dengan firman Allah Swt. lainnya dalam Al Quran surat Ali Imran ayat 103 berikut. "Berpegang-teguhlah kalian kepada tali (agama) Allah, dan janganlah terpecah belah [*Wa'tashimuu bi habli Allah jami'a, wa laa tafarraquu*]."

Yang dimaksud dengan 'berpegang teguh' kepada tali (agama) Allah dalam ayat di atas menyiratkan dua hal sekaligus. Pertama, keharusan untuk senantiasa berpegang pada ajaran dan panduan yang diberikan oleh Allah, berupa Al Quran dan hadis Nabi. Kedua, selalu mengingatkan bahwa dalam hal apa pun yang dilakukan harus selalu ada keterkaitan dan koneksinya dengan Allah. Sebab hal itu merupakan wujud dari rasa rendah hati dan tawadhu' yang memadai, yang dibutuhkan oleh setiap individu.

Kategori yang kedua adalah keselarasan antara instrumen dunia dengan akhirat. Hal ini sebagaimana yang tertulis dalam surat al-Qashas ayat 77 berikut ini, "Dan carilah pada anugerah yang telah diberikan Allah Swt. kepada kalian pahala akhirat, namun jangan lupakan bagian kalian di dunia ini." [*Wa ibtaghi li ma ataka Allah ad-dar al-akhirah, wa la tansa nashibak min ad-dunya*].

Ayat di atas memperjelas bahwa setiap manusia harus senantiasa berupaya memenangkan perjuangan di dunia, guna meraih kebahagiaan abadi di akhirat kelak. Semoga.

Wallahu a'lam bi ash-Shawwab



3



Sumber: www.vallides.com
www.kyladyfirst.com
thething.it

SAATNYA SISTEM PERSAMAAN

Manfaat:

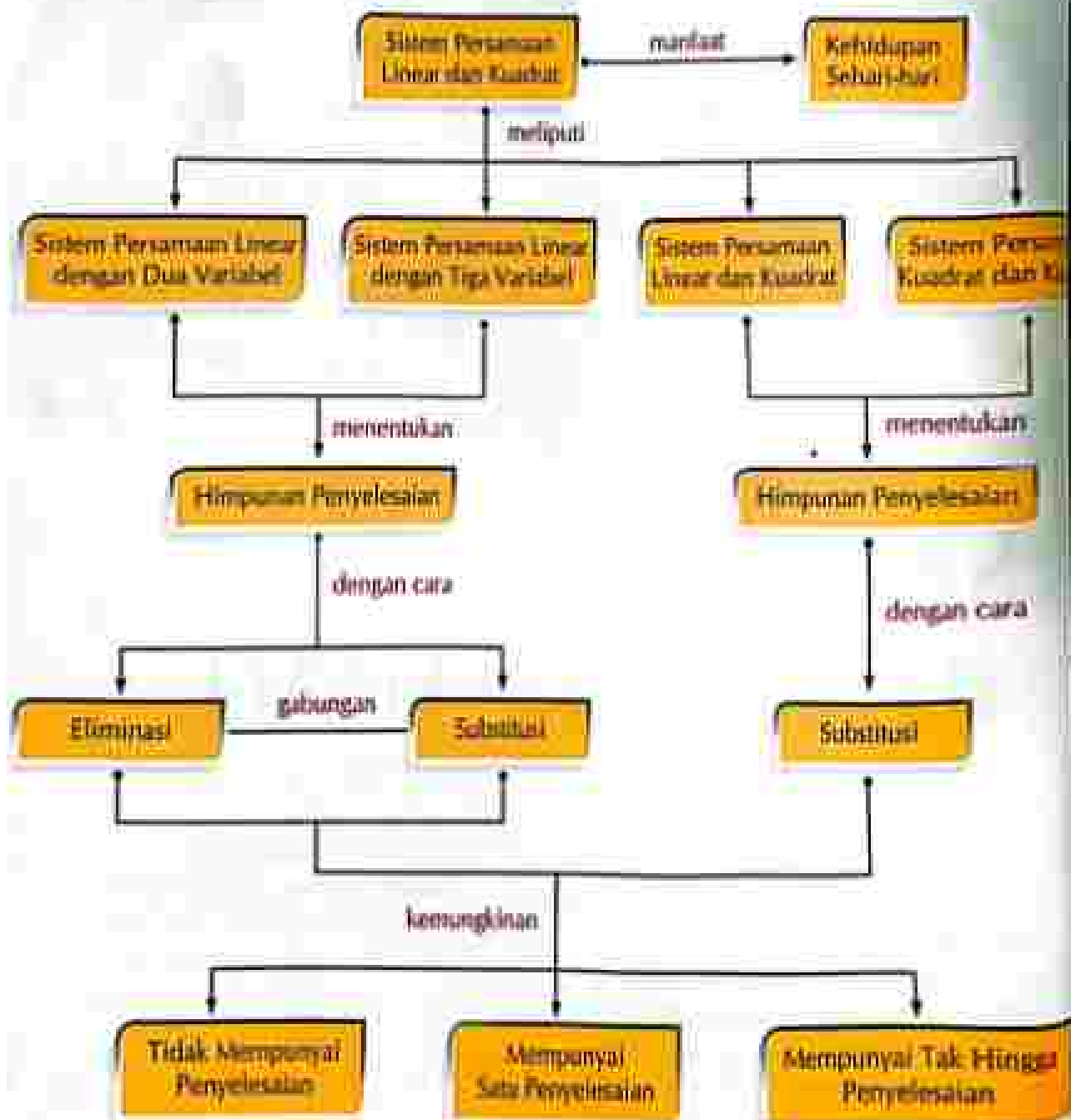
Kamu dapat menyelesaikan persoalan yang berhubungan dengan sistem persamaan linear dan kuadrat. Selain itu, kamu akan menemukan sisi matematika dari setiap permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Kata kunci: *Linear dan kuadrat.*

Heri merencanakan akan membelanjakan uang sebanyak Rp250.000,00 untuk hadiah ulang tahun temannya. Oleh karena temannya sangat suka menonton film, Heri berencana membeli film dalam bentuk VCD dan DVD. Jika harga VCD Rp60.000,00 dan harga DVD Rp110.000,00, berapa banyak VCD dan DVD yang dapat dijadikan hadiah Heri untuk temannya?

Permasalahan di atas adalah salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan dengan persamaan linear dua variabel dan sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari.

MIND MAP



A. Sistem Persamaan Linear dengan Dua Variabel

1. Persamaan Linear dengan Dua Variabel

Persamaan linear dengan dua variabel merupakan bentuk persamaan yang memuat dua variabel yang setiap variabelnya berpangkat satu. Perhatikan beberapa persamaan berikut.

- | | |
|-----------------|-------------------------|
| a. $3x = 6$ | e. $-4r = 2s + 1$ |
| b. $x + y = 6$ | f. $4x^2 - 8y = -9$ |
| c. $x - 8 = y$ | g. $p^3 + 2p^2 - 5 = 0$ |
| d. $5 + p = 2q$ | |

Persamaan (a) bukan merupakan persamaan linear dua variabel karena hanya memiliki satu variabel, yaitu x . Persamaan (b), (c), (d), dan (e) merupakan persamaan linear dua variabel karena memuat dua variabel dan setiap variabelnya berpangkat satu. Persamaan (f) bukan merupakan persamaan linear dua variabel karena salah satu variabelnya berpangkat dua. Persamaan (g) juga bukan merupakan persamaan linear dua variabel karena pangkat tertinggi adalah tiga.

Dari uraian di atas, dapat ditulis bentuk umum persamaan linear dua variabel, yaitu sebagai berikut.

$ax + by = c$, di mana a , b , dan c anggota himpunan riil, serta x dan y merupakan variabelnya.

Di dalam kehidupan sehari-hari, kita sering dihadapkan suatu permasalahan yang secara tidak sadar merupakan permasalahan linear dengan dua variabel. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Misalkan, Ajeng akan mengisi telepon genggamnya dengan beberapa nada sambung yang ia sukai. Setelah sampai di tempat pengisian nada sambung, ia mendapat informasi dari pelayan bahwa untuk pengisian satu nada sambung, ia harus membayar sebesar Rp9.000,00. Berapa banyak nada sambung yang dapat dibeli oleh Ajeng?

Permasalahan tersebut dapat dituliskan menjadi suatu bentuk persamaan dua variabel.

Misalkan, x adalah banyaknya nada sambung yang akan dibeli dan y adalah banyaknya uang yang harus dibayarkan.

Permasalahan tersebut dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$$y = 9.000x \quad (\text{jadikan ruas kanan sama dengan nol})$$

$$y - 9.000x = 0$$

$y - 9.000x = 0$ adalah bentuk persamaan linear dengan dua variabel, dengan variabelnya x dan y .

2. Penyelesaian Persamaan Linear dengan Dua Variabel

Dari bentuk umum persamaan $ax + by = c$, tentunya persamaan tersebut dapat bernilai benar atau salah bergantung pada nilai x dan y . Persamaan linear dua variabel $ax + by = c$ mempunyai grafik berbentuk sebuah garis lurus.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai x dan y (x, y) yang memenuhi sistem persamaan linear dengan dua variabel

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Jawab:

Perhatikan tabel $3x + 2y$ dengan mengambil beberapa bilangan bulat sebagai nilai x .

x	0	0	1	-1	2	2	3	5	7	-1	-2	-3
y	2	3	1	2	0	-3	-1	-4	-7	3	6	8
$3x + 2y$	4	6	5	7	6	0	7	7	7	3	6	7

Perhatikan tabel $2x + y$ dengan mengambil beberapa bilangan bulat sebagai nilai x .

x	0	0	1	1	2	2	-3	5	7	-1	-2	-3
y	3	4	1	2	0	-1	-1	-2	-4	-3	6	1
$2x + y$	3	4	3	4	4	3	5	4	4	-5	4	-3

Pada tabel $3x + 2y$, pasangan x dan y yang memenuhi adalah (1, 2).

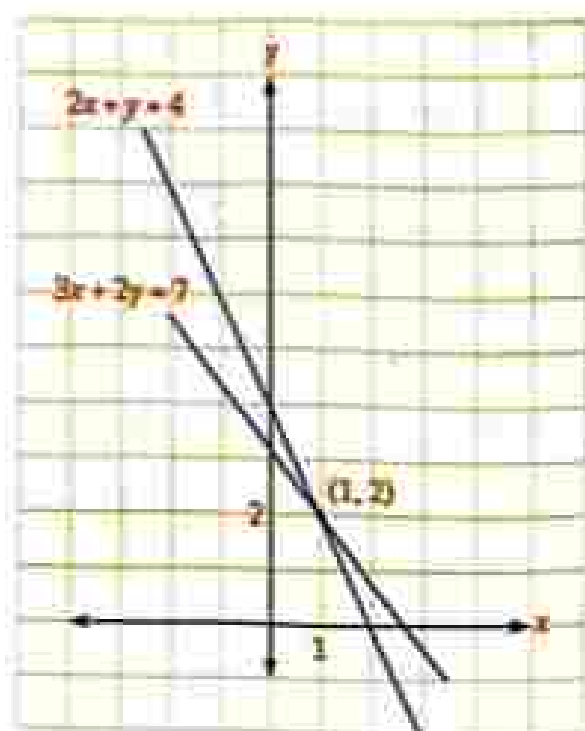
Pada tabel $2x + y$, pasangan x dan y yang memenuhi adalah (0, 4), (1, 2), (2, 0), (5, -2), (7, -4), dan (-2, 8).

Dari pasangan x dan y di atas, yang memenuhi untuk $3x + 2y = 7$ dan $2x + y = 4$ hanyalah (1, 2).

Jadi, penyelesaian dari $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ adalah (1, 2).

Penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan dua variabel tersebut dapat dinyatakan dengan grafik pada koordinat cartesius di samping.

Dari grafik di samping, dapat dilihat bahwa titik (1, 2) merupakan titik potong grafik $3x + 2y = 7$ dan $2x + y = 4$. Jadi, penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel merupakan titik potong dua grafik pada suatu sistem persamaan linear dua variabel.



Selain dengan menggambar grafik, penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel dapat juga ditentukan dengan cara lain, yaitu dengan cara:

- eliminasi,
- substitusi, dan
- gabungan eliminasi dan substitusi.

a. Metode Eliminasi

Eliminasi berasal dari bahasa Inggris, yaitu *elimination* yang artinya menghilangkan. Jadi, metode eliminasi artinya menghilangkan salah satu variabel untuk mencari variabel yang lain (menghilangkan x untuk mencari y dan sebaliknya).

Jika suatu sistem persamaan linear dua variabel dinyatakan dengan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \rightarrow \text{persamaan 1} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \rightarrow \text{persamaan 2} \end{cases} \text{ maka}$$

- mencari x dengan mengeliminasi y

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 && \leftarrow \text{kalikan dengan } b_2, \text{ koefisien } y \text{ pada persamaan 2} \\ a_2x + b_2y &= c_2 && \leftarrow \text{kalikan dengan } b_1, \text{ koefisien } y \text{ pada persamaan 1} \end{aligned}$$
- mencari y dengan mengeliminasi x

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 && \leftarrow \text{kalikan dengan } a_2, \text{ koefisien } x \text{ pada persamaan 2} \\ a_2x + b_2y &= c_2 && \leftarrow \text{kalikan dengan } a_1, \text{ koefisien } x \text{ pada persamaan 1} \end{aligned}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan dua variabel

$$\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$$

Mencari x dengan menghilangkan y .

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 14 \quad \dots (1) && (\times 4) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 2}) \\ 3x + 4y &= 23 \quad \dots (2) && (\times (-3)) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 1}), \text{ diperoleh} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16x - 12y &= 56 \\ -9x - 12y &= -69 \end{aligned}$$

$$25x = 56 - (-69) = 125 \rightarrow x = 5$$

Mencari y dengan menghilangkan x .

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 14 \quad \dots (1) && (\times 3) \quad (\text{koefisien } x \text{ pada persamaan 2}) \\ 3x + 4y &= 23 \quad \dots (2) && (\times 4) \quad (\text{koefisien } x \text{ pada persamaan 1}), \text{ diperoleh} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x - 9y &= 42 \\ 12x + 16y &= 92 \end{aligned}$$

$$-25y = 42 - 92 = -50 \rightarrow y = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5, 2)\}$.

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel

$$\begin{cases} 7x - 3y = -2 \\ 6x + 7y = -40 \end{cases} ?$$

Jawab:

$$\begin{cases} 7x - 3y = -2 \\ 6x + 7y = -40 \end{cases}$$

Mencari x dengan menghilangkan y .

$$7x - 3y = -2 \quad (\times 7) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 2})$$

$$6x + 7y = -40 \quad (\times (-3)) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 1) diperoleh}$$

$$49x - 21y = -14$$

$$-18x - 21y = 120$$

$$67x = -14 - 120 = -134$$

$$x = -2$$

Mencari y dengan menghilangkan x .

$$7x - 3y = -2 \quad (\times 6) \quad (\text{koefisien } x \text{ pada persamaan 2})$$

$$6x + 7y = -40 \quad (\times 7) \quad (\text{koefisien } x \text{ pada persamaan 1) diperoleh}$$

$$42x - 18y = -12$$

$$42x + 49y = -280$$

$$-67y = -12 - (-280) = -268$$

$$y = -4$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(-2, -4)\}$.

Notes

Agar lebih yakin dengan penyelesaian yang diperoleh, substitusikan nilai x dan y pada sistem persamaan dengan jawaban yang diperoleh. Jika sistem persamaan menjadi benar setelah nilai x dan y disubstitusikan maka jawabannya sudah pasti benar.

Misalnya, perbatikan kembali sistem persamaan linear dua variabel $\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$

Penyelesaian yang diperoleh adalah $x = 5$ dan $y = 2$.

Akan dibuktikan bahwa penyelesaian tersebut benar.

- Substitusikan nilai $x = 5$ dan $y = 2$ pada persamaan $4x - 3y = 14$.

$$4(5) - 3(2) = 20 - 6 = 14 \quad (\text{benar})$$

- Substitusikan nilai $x = 5$ dan $y = 2$ pada persamaan $3x + 4y = 23$.

$$3(5) + 4(2) = 15 + 8 = 23 \quad (\text{benar})$$

Jadi, benar bahwa $(5, 2)$ adalah penyelesaian dari setiap persamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$$

b. Metode Substitusi

Untuk menentukan himpunan penyelesaian dengan menggunakan metode substitusi, lakukan langkah-langkah berikut.

- 1) Pilih salah satu persamaan yang diketahui, kemudian ubahlah x sebagai fungsi dalam y atau sebaliknya.
- 2) Substitusikan x atau y pada langkah 1 ke persamaan yang lain.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 3x + 4y = 23 \end{cases}$$

Pilih salah satu persamaan, misalnya persamaan $4x - 3y = 14$.
Kemudian, ubahlah x ke dalam fungsi dalam y .

$$4x = 14 + 3y$$

$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{4}y \quad (1)$$

Substitusikan (1) ke persamaan yang lain, yaitu $3x + 4y = 23$ sehingga diperoleh

$$3\left(\frac{7}{2} + \frac{3}{4}y\right) + 4y = 23$$

$$\frac{21}{2} + \frac{9}{4}y + 4y = 23 \quad (\text{kedua ruas dikali empat untuk menghilangkan penyebut})$$

$$42 + 9y + 16y = 92$$

$$25y = 50$$

$$y = 2$$

Substitusikan nilai $y = 2$ ke persamaan (1) sehingga

$$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{4}y$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{3}{4}(2)$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5, 2)\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan dua variabel $\begin{cases} 7x - 3y = -2 \\ 6x + 7y = -40 \end{cases}$?

Jawab:

$$\begin{cases} 7x - 3y = -2 \\ 6x + 7y = -40 \end{cases}$$

Pilih salah satu persamaan, misalnya persamaan $7x - 3y = -2$. Kemudian, ubahlah y ke dalam fungsi dalam x .

$$3y = 7x + 2 \rightarrow y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} \dots (i)$$

Substitusikan persamaan (i) ke persamaan $6x + 7y = -40$ sehingga

$$6x + 7\left(\frac{7}{3}x + \frac{2}{3}\right) = -40$$

$$6x + \frac{49}{3}x + \frac{14}{3} = -40 \quad (\text{kedua ruas dikali tiga untuk menghilangkan penyebut})$$

$$18x + 49x + 14 = -120$$

$$67x = -134$$

$$x = -2$$

Substitusikan nilai $x = -2$ ke persamaan (i) sehingga

$$y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{7}{3}(-2) + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-14}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-12}{3} = -4$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(-2, -4)\}$.

INFO MATEMATIKA

Di dalam sejarah matematika, matematika di kalangan ilmuwan muslim berkembang sekitar tahun 622 sampai tahun 1600, di daerah di mana Islam menjadi agama yang dominan dan sebagai pusat kebudayaan. Ilmu pengetahuan Islam dan matematika berkembang pesat di bawah kekhalifahan atau dinasti Islam yang meliputi Timur Tengah, Asia Tengah, Afrika Utara, Sisilia, Peninsula, dan sebagian Prancis, serta India. Pada masa itu, perkembangan matematika Islam berpusat di Irak dan Iran.

Oleh karena pada masa tersebut ilmuwan didominasi oleh orang Islam dan bahasa Arab merupakan bahasa dominan seperti bahasa Latin di belahan Eropa, bahasa Arab digunakan sebagai bahasa tulis menulis para sarjana pada masa itu.

Kontributor: www.id.wikipedia.org

c. Gabungan Metode Eliminasi dan Metode Substitusi

Selain metode eliminasi dan metode substitusi, terdapat cara lain yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel, yaitu metode gabungan eliminasi dan substitusi. Cara ini digunakan dengan mencari x atau y dengan eliminasi dan mencari y atau x dengan menggunakan substitusi. Setelah mendapatkan nilai x atau y dengan eliminasi, substitusikan x atau y tersebut ke salah satu persamaan untuk mencari y atau x .

TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian dari tiap sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} & \text{b.} & \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \end{array}$$

Jawab:

$$\text{a.} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

Metode eliminasi

Mencari x dengan menghilangkan y .

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5y = 21 & \dots (1) & \times (-3) \quad -9x - 15y = -63 \\ 2x - 3y = -5 & \dots (2) & \times 5 \quad 10x - 15y = -25 \\ \hline & & -19x = -38 \rightarrow x = 2 \end{array}$$

Metode Substitusi

Substitusikan $x = 2$ ke persamaan (1) atau ke persamaan (2):

Persamaan (1): $3x + 5y = 21$

Untuk $x = 2 \rightarrow 3(2) + 5y = 21$

$$6 + 5y = 21$$

$$5y = 15$$

$$y = 3$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(2, 3)\}$.

$$\text{b.} \quad \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Metode eliminasi

Mencari x dengan menghilangkan y .

$$2x - y = 4$$

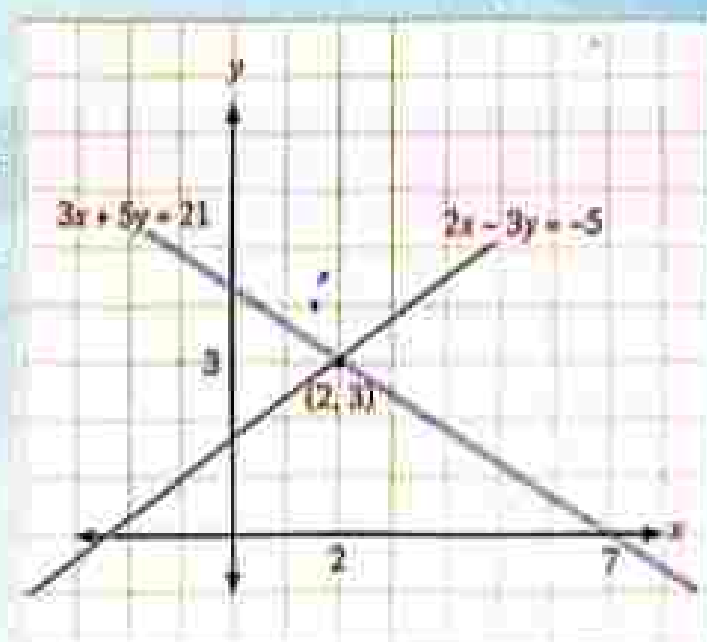
$$2x - y = 3$$

$$\hline 0 = 1 \text{ (tidak mungkin)}$$

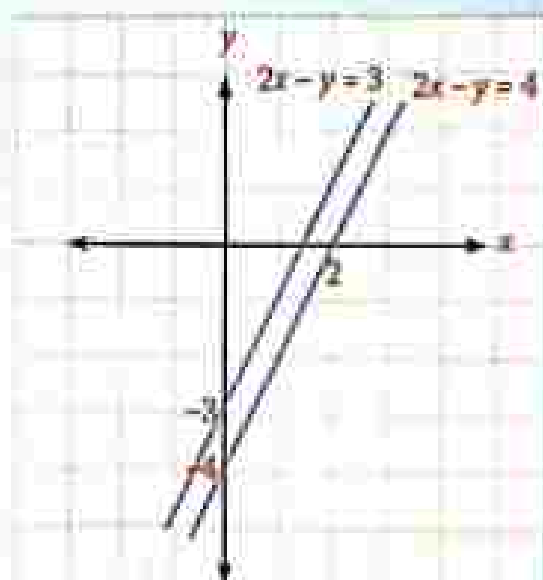
Jadi, sistem persamaan linear tersebut tidak mempunyai himpunan penyelesaian.

Secara umum, banyaknya penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ adalah sebagai berikut.

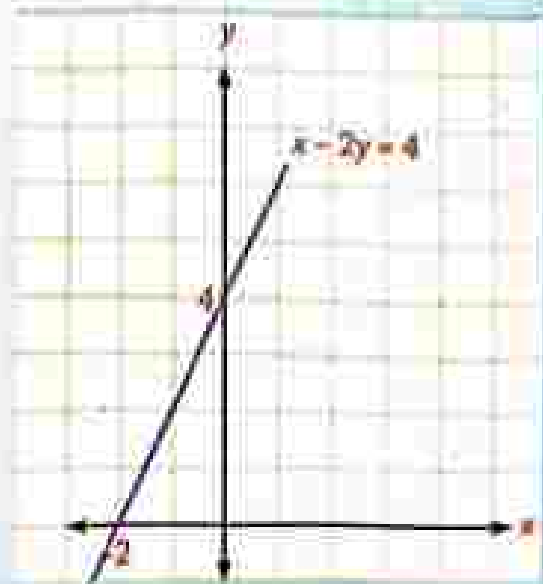
1. Jika $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ maka SPLDV tepat memiliki satu anggota dalam himpunan penyelesaiannya, seperti penyelesaian SPLDV $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$



2. Jika $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ dan $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, atau $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ maka SPLDV tidak memiliki anggota dalam himpunan penyelesaiannya, seperti penyelesaian SPLDV $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$



3. Jika $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ dan $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, atau $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ maka SPLDV memiliki tak hingga anggota dalam himpunan penyelesaiannya, seperti penyelesaian SPLDV $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$



TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel berikut.

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2} + \frac{y+4}{3} = \frac{13}{6} \\ \frac{x+2}{4} - \frac{3y-2}{2} = \frac{21}{4} \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2} + \frac{y+4}{3} = \frac{13}{6} & \dots (1) \\ \frac{x+2}{4} - \frac{3y-2}{2} = \frac{21}{4} & \dots (2) \end{cases}$$

Perhatikan persamaan (1): $\frac{2x-3}{2} + \frac{y+4}{3} = \frac{13}{6}$ (kalikan kedua ruas dengan 6)

$$3(2x-3) + 2(y+4) = 13$$

$$6x-9+2y+8=13$$

$$6x+2y=14$$

$$3x+y=7 \dots (3)$$

Perhatikan persamaan (2): $\frac{x+2}{4} - \frac{3y-2}{2} = \frac{21}{4}$ (kalikan kedua ruas dengan 4)

$$x+2-2(3y-2)=21$$

$$x+2-6y+4=21$$

$$x-6y=15 \dots (4)$$

Dengan demikian, SPLDV tersebut dapat ditulis $\begin{cases} 3x+y=7 \\ x-6y=15 \end{cases}$

Dari persamaan (4): $x-6y=15$ maka $x=6y+15$.

Substitusikan $x=6y+15$ ke persamaan (3) sehingga

$$3(6y+15)+y=7$$

$$18y+45+y=7$$

$$19y=-38$$

$$y=-2$$

Substitusikan $y=-2$ ke persamaan $x=6y+15$ sehingga

$$x=6(-2)+15$$

$$=-12+15=3$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(3, -2)\}$.

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel berikut?

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{6}{y} = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{12} & \dots (1) \\ \frac{3}{x} - \frac{6}{y} = -\frac{5}{4} & \dots (2) \end{cases}$$

Perhatikan persamaan (1): $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$ (kalikan kedua ruas dengan $12xy$)

$$12y + 24x = 11xy \dots (3)$$

Perhatikan persamaan (2): $\frac{3}{x} - \frac{6}{y} = -\frac{5}{4}$ (kalikan kedua ruas dengan $4xy$)

$$12y - 24x = -5xy \dots (4)$$

Dengan demikian, SPLDV tersebut dapat ditulis

$$\begin{cases} 24x + 12y = 11xy \\ -24x + 12y = -5xy \end{cases}$$

Eliminasikan persamaan (3) dan persamaan (4).

$$24x + 12y = 11xy$$

$$-24x + 12y = -5xy$$

$$\hline 48x = 16xy$$

$$y = 48x : 16x = 3$$

Substitusikan $y = 3$ ke persamaan (3).

$$24x + 12y = 11xy$$

$$24x + 12(3) = 11x(3)$$

$$24x + 36 = 33x$$

$$9x = 36$$

$$x = 4$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(4, 3)\}$.

ASAHI OTAK

PERSAMAAN LINEAR DENGAN DUA VARIABEL

1. Diketahui persamaan linear dengan dua variabel $2x + y = 5$ dengan x dan y anggota bilangan cacah kurang dari 5. Buatlah tabelnya terlebih dahulu untuk menentukan pasangan nilai x dan y (x, y) yang memenuhi persamaannya. Bagaimanakah gambar sketsa grafiknya?
2. Dapatkan kamu menentukan himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear dengan dua variabel berikut?

a.
$$\begin{cases} 7x + 2y = 10 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x - 5y = 22 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 8x + 3y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 9x + 4y = 28 \\ 4y - 11x = -12 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} -3x + 4y = xy \\ 4x + 6y = 6xy \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{6}{y} = 1 \\ \frac{17}{x} + \frac{30}{y} = 16 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} \frac{2}{x+y} = \frac{1}{2x+y} \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} 125^{x-y} = 25 \\ 3^{x-y} = 81 \end{cases}$$

5. Penerapan Sistem Persamaan Linear dengan Dua Variabel

Di dalam kehidupan sehari-hari, secara tidak sadar, kita sering menjumpai permasalahan yang berhubungan dengan sistem persamaan linear dengan dua variabel. Berikut beberapa contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan sistem persamaan linear dengan dua variabel.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui jumlah dua buah bilangan cacah adalah 55 dan selisihnya adalah 25. Berapakah nilai kedua bilangan tersebut?

Jawab:

Misalkan, kedua bilangan tersebut adalah x dan y .

Sistem persamaan linear dengan dua variabel yang sesuai dengan persoalan di atas adalah

$$\begin{cases} x + y = 55 & \text{--- (1)} \\ x - y = 25 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

Dari persamaan (1): $x + y = 55$, diperoleh $x = 55 - y$.

Substitusikan $x = 55 - y$ ke persamaan (2) sehingga

$$(55 - y) - y = 25$$

$$-2y = -30$$

$$y = 15$$

Substitusikan $y = 15$ ke persamaan $x = 55 - y$ sehingga

$$x = 55 - 15 = 40$$

Jadi, kedua bilangan tersebut adalah 15 dan 40.

Tanya:

Keliling sebuah persegi panjang adalah 80 cm sedangkan panjangnya lebih 10 cm dari lebarnya. Berapakah ukuran panjang dan lebar persegi panjang tersebut?

Jawab:

Misalkan, panjang = x cm dan lebar = y cm. Artinya, $x = 10 + y$.

Keliling = 2 panjang + 2 lebar.

Sistem persamaan linear dengan dua variabel yang sesuai dengan persoalan di atas adalah

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

Dari persamaan $x + y = 40$ diperoleh $x = 40 - y$.

Substitusikan $x = 40 - y$ ke persamaan $x - y = 10$ sehingga

$$(40 - y) - y = 10$$

$$-2y = -30$$

$$y = 15$$

Substitusikan $y = 15$ ke persamaan $x = 40 - y$ sehingga

$$x = 40 - 15 = 25$$

Jadi, persegi panjang tersebut mempunyai ukuran panjang = 25 cm dan lebar = 15 cm.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Ani dan Lia bekerja pada sebuah konveksi. Setiap jamnya, Ani dapat membuat 4 baju sedangkan Lia dapat membuat 5 baju. Jumlah jam kerja Ani dan Lia adalah 12 jam dengan banyak baju yang dapat mereka buat adalah 53 buah. Banyaknya waktu bekerja Ani dan Lia tidak sama. Berapa lamakah Ani dan Lia masing-masing bekerja?

Jawab:

Misalkan, dalam satu hari Ani bekerja selama x jam dan Lia bekerja selama y jam. Sistem persamaan linear dengan dua variabel yang sesuai dengan persoalan di atas adalah

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 4x + 5y = 53 \end{cases}$$

Dari persamaan $x + y = 12$, diperoleh $x = 12 - y$.

Substitusikan $x = 12 - y$ ke persamaan $4x + 5y = 53$ sehingga

$$4(12 - y) + 5y = 53$$

$$48 - 4y + 5y = 53$$

$$y = 5$$

Substitusikan $y = 5$ ke persamaan $x = 12 - y$ sehingga

$$x = 12 - 5 = 7$$

Jadi, Ani bekerja selama 7 jam dan Lia bekerja selama 5 jam.



MATH AROUND US

Diketahui jumlah harga 3 celana dan 2 baju adalah Rp280.000,00. Adapun jumlah harga 1 celana dan 3 baju adalah Rp210.000,00. Jumlah harga 6 baju dan 6 celana dapat ditentukan dengan menuliskan permasalahan tersebut dalam sistem persamaan linear dengan dua variabel.

Misalkan, harga celana adalah x rupiah dan harga baju y rupiah. Sistem persamaan linear

dengan dua variabel yang sesuai dengan persoalan di atas adalah
$$\begin{cases} 3x + 2y = 280.000 \\ x + 3y = 210.000 \end{cases}$$

Dari persamaan $x + 3y = 210.000$ diperoleh $x = 210.000 - 3y$.

Substitusikan $x = 210.000 - 3y$ ke persamaan $3x + 2y = 280.000$ sehingga

$$3(210.000 - 3y) + 2y = 280.000$$

$$630.000 - 9y + 2y = 280.000$$

$$-7y = -350.000$$

$$y = 50.000$$

Substitusikan $y = 50.000$ ke persamaan $x = 210.000 - 3y$ sehingga

$$x = 210.000 - 3(50.000) = 210.000 - 150.000 = 60.000$$

$$\text{Harga 6 baju dan 6 celana} = 6x + 6y = 6(60.000) + 6(50.000) = 360.000 + 300.000 = 660.000$$

Artinya, harga 6 baju dan 6 celana adalah Rp. 660.000,00.

LET'S DO IT

Alat dan Bahan:

Alat ukur dan timbangan yang hanya dapat mengukur berat lebih dari 80 kg.

Cara Bermain:

- Bagilah siswa/i di dalam kelas menjadi beberapa kelompok yang terdiri atas 6 orang.
- Setiap kelompok menunjuk satu orang yang akan menimbang berat badan temannya. Jika ada yang beratnya lebih dari 80 kg maka siswa/i tersebut yang menjadi pengukur.
- Setiap pengukuran dilakukan terhadap dua orang siswa sesuai tabel. Lakukan pengukuran sebanyak 10 kali.
- Misalnya, siswa yang diukur adalah A, B, C, D dan E. Isikan hasilnya pada tabel berikut.

Nama Siswa	Hasil Pengukuran (kg)
A + B	---
A + C	---
A + D	---
A + E	---
B + C	---
B + D	---
B + E	---
C + D	---
C + E	---
D + E	---

- Tentukan berat badan setiap anggota kelompok.

Berkas 107-108.indd 309

INFO MATEMATIKA

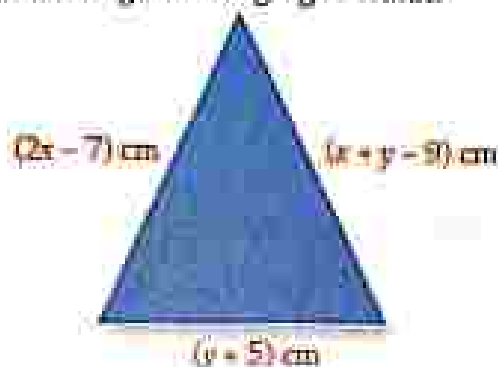
<http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html>

Situs ini berisi penjelasan mengenai asal-usul simbol matematika. Misalnya, simbol-simbol operasi hitung, yaitu simbol penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Di situs ini, dijelaskan siapa yang pertama kali menggunakan simbol-simbol tersebut, alasan mengapa penjumlahan dilambangkan dengan +, pengurangan dengan -, perkalian dengan $\times$ atau $\cdot$, dan pembagian dengan $:$, serta lain sebagainya. Bagaimana dengan simbol-simbol matematika yang lain? Ayo cari tahu dengan membuka situs ini!

ASAHI OTAK

PENERAPAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN DUA VARIABEL

1. Ajeng dan Dimas masing-masing mempunyai sejumlah uang. Jika Ajeng memberikan Rp30.000,00 kepada Dimas maka uang Dimas menjadi dua kali sisa uang Ajeng. Akan tetapi, jika Dimas memberi Rp10.000,00 kepada Ajeng maka uang Ajeng akan menjadi tiga kali sisa uang Dimas. Berapa banyak uang yang dimiliki Ajeng?
2. Jika 1 ditambahkan pada pembilang sebuah pecahan dan penyebutnya ditambah 2 maka pecahan tersebut bernilai $\frac{2}{3}$. Jika pembilangnya dikurangi 2 dan penyebutnya dikurangi 1 maka nilai pecahan tersebut $\frac{1}{3}$. Berapakah nilai penyebut pecahan tersebut?
3. Perhatikan gambar segitiga berikut.



Tentukan keliling segitiga tersebut dalam cm.

4. Perbandingan gaji Pak Ali dengan gaji Pak Andi adalah 4 : 3. Setiap bulannya, Pak Ali dan Pak Andi menabung sebanyak Rp60.000,00. Jika perbandingan yang dibelanjakan Pak Ali dengan Pak Andi sama dengan 3 : 2, berapa besar gaji Pak Ali?
5. Di sebuah toko, Ajeng membeli 4 bungkus kopi dan 2 butir telur dengan harga Rp4.000,00. Adapun Dimas membeli 10 bungkus kopi dan 4 butir telur dengan harga Rp9.500,00. Jika di toko yang sama, Nia membeli satu bungkus kopi dan sebutir telur, berapa banyak uang yang harus dibayarkan Nia?
6. Jumlah umur Ajeng dan Dimas saat ini adalah 36 tahun. Enam tahun yang lalu, umur Ajeng dua kali umur Dimas. Berapa tahun umur Ajeng lima tahun dari sekarang?
7. Pak Karjo memelihara ayam dan kelinci di dalam sebuah kandang. Suatu hari, Pak Karjo melihat bahwa di dalam kandangnya terdapat 70 kepala dan 196 kaki. Berapakah perbandingan banyaknya kelinci dan ayam yang dipelihara Pak Karjo?
8. Sepuluh tahun yang lalu, umur Kakek enam kali umur Ajeng. Lima tahun yang akan datang, jumlah umur Kakek dan Ajeng sama dengan 92 tahun. Berapa tahun umur Ajeng sekarang?

B. Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel

1. Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mempelajari sistem persamaan linear dengan dua variabel. Jika terdapat tiga persamaan dengan tiga variabel maka akan terbentuk suatu sistem yang disebut dengan sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Bentuk umum dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ di mana } a_i, b_i, \dots, d_i \in \mathbb{R}$$

Berikut adalah beberapa contoh sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - 3z = -2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} & \text{h. } \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + y = 6 \\ x + 3z = -2 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x + 3y + 5z = 9 \\ -x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \end{array}$$

2. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel

Penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah nilai x , y , dan z yang apabila disubstitusikan akan menjadikan sistem persamaan tersebut bernilai benar.

Jika (x_0, y_0, z_0) adalah penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

maka berlaku

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1,$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2, \text{ dan}$$

$$a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3$$

Himpunan penyelesaiannya ditulis $\{(x_0, y_0, z_0)\}$.

Untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel, digunakan beberapa cara, yaitu sebagai berikut.

1. Metode substitusi
2. Metode eliminasi
3. Metode gabungan (eliminasi dan substitusi)

a. Metode Eliminasi

Jika suatu sistem persamaan dinyatakan dengan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \rightarrow \text{persamaan 1} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \rightarrow \text{persamaan 2} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \rightarrow \text{persamaan 3} \end{cases}$$

Mengeliminasi x dari persamaan 1 dan 2:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (\text{kalikan dengan } a_2 \text{ (koefisien } x \text{ pada persamaan 2)})$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (\text{kalikan dengan } a_1 \text{ (koefisien } x \text{ pada persamaan 1)})$$

sehingga akan didapat sistem persamaan linear dengan dua variabel dalam y dan z yang disebut dengan persamaan 4. Untuk mencari sistem persamaan linear dengan dua variabel yang lain, kamu dapat mengeliminasi x dari persamaan 1 dan 3 atau dari persamaan 2 dan 3.

Mengeliminasi x dari persamaan 1 dan 3:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (\text{kalikan dengan } a_3 \text{ (koefisien } x \text{ pada persamaan 3)})$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (\text{kalikan dengan } a_1 \text{ (koefisien } x \text{ pada persamaan 1)})$$

sehingga akan didapat sistem persamaan linear dengan dua variabel dalam y dan z yang disebut dengan persamaan 5.

Dari persamaan 4 dan 5, kamu dapat melakukan proses eliminasi seperti pada sistem persamaan linear dengan dua variabel yang telah dipelajari sebelumnya.

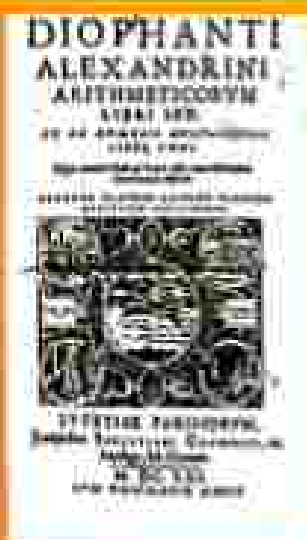


AMAZING PERSON

DIOPHANTUS

(kelahir tahun 200 sampai dengan 218 – wafat tahun 284 sampai dengan 288)

Pencetus Persamaan Diophantin



Diophantus merupakan seorang matematikawan dari Mesir. Ia bersama al Khawarizmi sering disebut-sebut sebagai "Bapak Aljabar". Ia adalah orang yang memulai kumpulan buku yang berjudul "Arithmetica". Buku-buku tersebut berisi cara-cara menyelesaikan berbagai macam persamaan aljabar. Diophantus merupakan matematikawan pertama yang menyatakan bahwa pecahan termasuk bilangan dan menemukan bilangan rasional yang positif sebagai suatu koefisien dan penyelesaian suatu persamaan. Sekarang, persamaan Diophantus merupakan persamaan aljabar yang koefisiennya berupa bilangan bulat. Gambar di samping merupakan sampul buku "Arithmetica" karya Diophantus yang diterjemahkan ke dalam bahasa Latin oleh Claude Gaspard Bachet de Méziriac.

<https://www.ck12.org>

<https://www.ck12.org>

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian dari
$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 25 \\ 3x + 2y - 3z = 16 \\ 2x - y + z = 9 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 25 & \rightarrow \text{persamaan (1)} \\ 3x + 2y - 3z = 16 & \rightarrow \text{persamaan (2)} \\ 2x - y + z = 9 & \rightarrow \text{persamaan (3)} \end{cases}$$

Mengeliminasi x dari persamaan 1 dan 2:

$$\begin{array}{rcl} 5x - y + 2z = 25 & (\times 3) & \text{(koefisien } x \text{ pada persamaan 2)} \\ 3x + 2y - 3z = 16 & (\times 5) & \text{(koefisien } x \text{ pada persamaan 1)} \\ \hline 15x - 3y + 6z = 75 \\ 15x + 10y - 15z = 80 \\ \hline -13y + 21z = -5 & \dots & \text{persamaan 4} \end{array}$$

Mengeliminasi x dari persamaan 1 dan 3:

$$\begin{array}{rcl} 5x - y + 2z = 25 & (\times 2) & \text{(koefisien } x \text{ pada persamaan 3)} \\ 2x - y + z = 9 & (\times 5) & \text{(koefisien } x \text{ pada persamaan 1)} \\ \hline 10x - 2y + 4z = 50 \\ 10x - 5y + 5z = 45 \\ \hline y - z = 5 & \dots & \text{persamaan 5} \end{array}$$

Mengeliminasi y untuk mencari z dari persamaan 4 dan 5:

$$\begin{array}{rcl} -13y + 21z = -5 & (\times 3) & \text{(koefisien } y \text{ pada persamaan 5)} \\ 3y - z = 5 & (\times (-13)) & \text{(koefisien } y \text{ pada persamaan 4)} \\ \hline -39y + 63z = -15 \\ -39y + 13z = -65 \\ \hline 50z = 50 \text{ maka } z = 1 \end{array}$$

Mengeliminasi z untuk mencari y :

$$\begin{array}{rcl} -13y + 21z = -5 & (\times (-1)) & \text{(koefisien } z \text{ pada persamaan 5)} \\ 3y - z = 5 & (\times 21) & \text{(koefisien } z \text{ pada persamaan 4)} \\ \hline 13y - 21z = 5 \\ 63y - 21z = 105 \\ \hline -50y = -100 \text{ maka } y = 2 \end{array}$$

Nilai x dicari dengan menyubstitusikan $y = 2$ dan $z = 1$ ke dalam salah satu dari 3 persamaan semula, misalnya ke persamaan 3.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 9 \\ 2x - 2 + 1 &= 9 \\ 2x - 1 &= 9 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5, 2, 1)\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{cases} x+3y+5z=9 \\ -x+y+z=1 \\ x+2y+2z=5 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} x+3y+5z=9 & \rightarrow \text{persamaan (1)} \\ -x+y+z=1 & \rightarrow \text{persamaan (2)} \\ x+2y+2z=5 & \rightarrow \text{persamaan (3)} \end{cases}$$

Mengeliminasi y dari persamaan 1 dan 2.

$$\begin{array}{ll} x+3y+5z=9 & (\times 1) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 2}) \\ -x+y+z=1 & (\times 3) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+3y+5z=9 \\ -3x+3y+3z=3 \\ \hline 4x+2z=6 \\ 2x+z=3 \quad \dots \text{persamaan 4} \end{array}$$

Mengeliminasi y dari persamaan 2 dan 3.

$$\begin{array}{ll} -x+y+z=1 & (\times 2) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 3}) \\ x+2y+2z=5 & (\times 1) \quad (\text{koefisien } y \text{ pada persamaan 1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x+2y+2z=2 \\ x+2y+2z=5 \\ \hline -3x=-3 \end{array}$$

$$x=1$$

Oleh karena sudah diperoleh nilai x maka nilai $x=1$ langsung disubstitusikan ke persamaan 4.

$$2x+z=3$$

$$2(1)+z=3$$

$$z=1$$

Nilai y dicari dengan menyubstitusikan $x=1$ dan $z=1$ ke dalam salah satu dari 3 persamaan semula.

Misalnya, diambil persamaan 2.

$$-x+y+z=1$$

$$-(1)+y+(1)=1$$

$$y=1$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 1, 1)\}$.

ASAHI OTAK

PERSAMAAN LINEAR DENGAN TIGA VARIABEL

Dapatkan kamu menentukan himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear dengan tiga variabel berikut?

$$1. \begin{cases} x+y-z=24 \\ 2x-y+2z=4 \\ x+2y-3z=36 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = 0 \\ \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=4 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x-y+z=10 \\ 2x+3y-z=8 \\ x+y-2z=-10 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x-2y=15 \\ 5x+4y=3 \\ 2x-5z=-44 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x-2y=15 \\ 5x+4y=3 \\ 2x-5z=-44 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x+y=7 \\ y-z=9 \\ y+z=11 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{x}{z} = 0,6 \\ 9x+5(2y+z)=184 \end{cases}$$



AMAZING PERSON

ABU KAMIL (900-1200)

Kalkulator dari Mesir

Abu Kamil memiliki nama panjang **Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja**. Ia adalah salah seorang matematikawan Muslim asal Mesir.

Pada abad ke-9, beliau telah berhasil menentukan nilai x , y , dan z untuk sistem persamaan:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x^2+y^2=z^2 \\ xz=y^2 \end{cases}$$

Atas kontribusinya ini, beliau mendapat julukan "Kalkulator dari Mesir".

Sumber: http://www.muslim.or.id/index.php/70118/2020_5/4/jurnal.html

3. Penerapan Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel

Pada bagian sebelumnya, kita telah mempelajari bagaimana cara menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan sistem persamaan linear dengan dua variabel. Pada bagian ini, akan dibahas beberapa masalah yang sering muncul dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui jumlah tiga bilangan sama dengan 50. Jika bilangan terkecil dibagi 3 maka hasilnya akan sama dengan bilangan terbesar dibagi 7. Jika bilangan terkecil dan menengah dijumlahkan maka hasilnya akan sama dengan bilangan terbesar ditambah delapan. Berapakah nilai bilangan yang terbesar?

Jawab:

Misalkan, bilangan terkecil = x , bilangan menengah = y , dan bilangan terbesar = z .

Sistem persamaan linear dengan tiga variabel untuk persoalan di atas adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ \frac{x}{3} = \frac{z}{7} \\ x + y = z + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 50 & \text{persamaan (1)} \\ 7x - 3z = 0 & \text{persamaan (2)} \\ x + y - z = 8 & \text{persamaan (3)} \end{cases}$$

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$\begin{array}{r} x + y + z = 50 \\ x + y - z = 8 \\ \hline 2z = 42 \rightarrow z = 21 \end{array}$$

Jadi, bilangan terbesarnya adalah 21.

Tanya:

Jika gaji A, B, dan C digabung maka hasilnya sama dengan Rp1.600.000,00. Jika gaji B diambil Rp100.000,00 dan diberikan kepada A maka gaji A akan sama dengan gaji B. Jika gaji C ditambah Rp200.000,00 maka gaji C akan sama dengan jumlah gaji A dan B. Berapakah besar gaji C?

Jawab:

Sistem persamaan linear dengan tiga variabel dari persoalan di atas adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} A + B + C = 1.600.000 \\ A + 100.000 = B \\ C + 200.000 = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 1.600.000 & \text{persamaan (1)} \\ A - B = 100.000 & \text{persamaan (2)} \\ A + B - C = 200.000 & \text{persamaan (3)} \end{cases}$$

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$$\begin{array}{r} A + B + C = 1.600.000 \\ A + B - C = 200.000 \\ \hline 2C = 1.400.000 \rightarrow C = 700.000 \end{array}$$

Jadi, besar gaji C adalah Rp. 700.000,00.

ASAHI OTAK

PENERAPAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN TIGA VARIABEL

1. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ melalui titik $P(-1, 10)$, $Q(1, 4)$, dan $R(2, 7)$. Berapakah nilai a , b , dan c ?
2. Sudut terbesar suatu segitiga sama dengan dua kali sudut terkecil. Jumlah sudut terkecil dan sudut menengah (bukan yang terkecil dan terbesar) sama dengan 106° . Dapatkah kamu menentukan besar setiap sudut dalam segitiga tersebut? Berapakah nilai-nilainya?
3. Jumlah tiga bilangan sama dengan 50. Jika bilangan terkecil dibagi 3 maka hasilnya akan sama dengan bilangan terbesar dibagi 7. Jika bilangan terkecil dan menengah dijumlahkan hasilnya akan sama dengan bilangan terbesar ditambah 8. Berapa selisih bilangan terbesar dan terkecilnya?
4. Tiga buah mesin yaitu P , Q , dan R dalam satu hari dapat memproduksi 222 koper. Jika yang bekerja hanya P dan Q maka jumlah koper yang dapat diproduksi adalah sebanyak 159 buah. Jika yang bekerja hanya Q dan R maka jumlah koper yang dapat diproduksi adalah sebanyak 147 buah. Berapa banyak koper yang diproduksi jika hanya mesin P yang bekerja?
5. Dari tiga buah bilangan, diketahui bahwa perbandingan bilangan pertama dan bilangan kedua adalah $1 : 5$, perbandingan bilangan kedua dan ketiga adalah $5 : 7$, dan dua kali bilangan pertama ditambah tiga kali bilangan kedua adalah 130 lebihnya dari bilangan ketiga. Berapa jumlah ketiga bilangan tersebut?
6. Sebuah bilangan terdiri atas 3 angka. Jumlah angka-angkanya sama dengan 12. Jika bilangan yang terbentuk oleh dua angka pertama dibagi angka yang terakhir maka hasil sama dengan 4. Jika bilangan yang terbentuk oleh dua angka terakhir dibagi oleh angka ratusannya maka hasil baginya sama dengan 23. Jika bilangan tersebut dikurangi 100, berapakah hasilnya?
7. Jika A dan B bekerja bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan selama 20 hari. Jika B dan C bekerja bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan selama 12 hari. Adapun jika A dan C bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan tersebut selama 10 hari. Berapa lama waktu yang diperlukan oleh A untuk menyelesaikan pekerjaannya jika ia bekerja sendiri?
8. Diketahui pengunjung sebuah bioskop adalah sebanyak 95 orang, yang terdiri atas anggota TNI, dewasa, dan anak-anak. Harga tiket bioskop untuk anggota TNI, dewasa, dan anak-anak berturut-turut adalah Rp7.000,00, Rp7.500,00, dan Rp4.000,00. Total pendapatan bioskop dari penjualan tiket sama dengan Rp525.000,00. Jika setiap orang dewasa membawa dua orang adik mereka yang masih anak-anak, berapa banyak jumlah penonton dari kalangan anggota TNI dan anak-anak?

C. Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat

1. Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat

Sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah suatu sistem persamaan yang terdiri atas dua atau lebih persamaan linear dua variabel. Adapun sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah suatu sistem persamaan yang terdiri atas tiga atau lebih persamaan linear dengan tiga variabel.

Bagaimana jika suatu sistem persamaan terdiri atas persamaan linear dua variabel dan persamaan kuadrat seperti berikut?

$$\begin{array}{ccc} \cdot \begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = x^2 + 3 - 4 \end{cases} & \cdot \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x^2 + 4x - 6 \end{cases} & \cdot \begin{cases} y = 2 - x \\ y = x^2 - 9 \end{cases} \end{array}$$

Bentuk sistem persamaan seperti di atas disebut dengan sistem persamaan linear dan kuadrat.

Secara umum, sistem persamaan linear dan kuadrat dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{cases} y = px + q \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}, \text{ di mana } p, q, a, b, \text{ dan } c \in \mathbb{R}, p, a \neq 0$$

2. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat

Penyelesaian dari sistem persamaan linear dan kuadrat pada hakikatnya sama dengan pengertian penyelesaian pada sistem persamaan linear dengan dua atau tiga variabel, yaitu sepasang nilai x dan y yang apabila disubstitusikan ke sistem persamaannya akan menjadikan sistem persamaan tersebut bernilai benar.

Penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} y = px + q \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- a. Substitusikan $y = px + q$ ke persamaan $y = ax^2 + bx + c$.

$$px + q = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx + c - px + c - q = 0 \quad (\text{jadikan ruas kanan menjadi nol})$$

$$ax^2 + (b - p)x + (c - q) \quad (\text{persamaan kuadrat dalam } x)$$

Dengan demikian, kita bisa mendapatkan nilai x yang merupakan akar penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut.

- b. Kemudian, nilai-nilai x yang diperoleh (jika ada) dari langkah 1 disubstitusikan ke persamaan $y = px + q$ atau $y = ax^2 + bx + c$ sehingga akan diperoleh nilai y .

Dari langkah 1, kita mendapatkan persamaan kuadrat $ax^2 + (b - p)x + (c - q) = 0$. Banyaknya anggota himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan diskriminan.

Diskriminan dari $ax^2 + (b - p)x + (c - q) = 0$ adalah $D = b^2 - 4ac = (b - p)^2 - 4a(c - q)$. Banyaknya anggota himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dan kuadrat berdasarkan nilai diskriminannya adalah sebagai berikut.

1. Jika $D > 0$ maka sistem persamaan mempunyai dua anggota himpunan penyelesaian.
2. Jika $D = 0$ maka sistem persamaan mempunyai satu anggota himpunan penyelesaian.
3. Jika $D < 0$ maka sistem persamaan tidak mempunyai himpunan penyelesaian atau $H_p = \emptyset$.

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian dari tiap sistem persamaan berikut.

a.
$$\begin{cases} y = 2x + 8 \\ y = x^2 + 3x - 4 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} y = 5x - 10 \\ y = x^2 + x - 6 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

Jawab:

a.
$$\begin{cases} y = 2x + 8 & \text{persamaan (1)} \\ y = x^2 + 3x - 4 & \text{persamaan (2)} \end{cases}$$

Substitusikan persamaan (1): $y = 2x + 8$ ke persamaan (2): $y = x^2 + 3x - 4$ sehingga

$$2x + 8 = x^2 + 3x - 4 \quad (\text{pindahkan ruas kiri ke ruas kanan})$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0 \quad \text{persamaan (1)}$$

$$x = -4 \text{ atau } x = 3 \quad \text{persamaan (2)}$$

$$\text{Untuk } x = -4 \rightarrow y = 2(-4) + 8 = 0$$

$$\text{Untuk } x = 3 \rightarrow y = 2(3) + 8 = 14$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(-4, 0), (3, 14)\}$.

b.
$$\begin{cases} y = 5x - 10 & \text{persamaan (1)} \\ y = x^2 + x - 6 & \text{persamaan (2)} \end{cases}$$

Substitusikan persamaan (1): $y = 5x - 10$ ke persamaan (2): $y = x^2 + x - 6$ sehingga

$$5x - 10 = x^2 + x - 6 \quad (\text{pindahkan ruas kiri ke ruas kanan})$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

$$\text{Untuk } x = 2 \rightarrow y = 5(2) - 10 = 0$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(2, 0)\}$.

c.
$$\begin{cases} y = x - 4 & \text{persamaan (1)} \\ y = x^2 + 2x - 3 & \text{persamaan (2)} \end{cases}$$

Substitusikan persamaan (1): $y = x - 4$ ke persamaan (2): $y = x^2 + 2x - 3$ sehingga

$$x - 4 = x^2 + 2x - 3 \quad (\text{pindahkan ruas kiri ke ruas kanan})$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = -3 \rightarrow D < 0$$

Jadi, sistem persamaan tersebut tidak mempunyai himpunan penyelesaian atau $H_p = \emptyset$.

Notes

Banyaknya anggota himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} y = px + q \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ berdasarkan nilai-nilai diskriminannya, yaitu $D = (b - p)^2 - 4a(c - q)$.

1. $D > 0$, mempunyai dua anggota himpunan penyelesaian.



2. $D = 0$, mempunyai satu anggota himpunan penyelesaian.



3. $D < 0$, tidak mempunyai himpunan penyelesaian atau $H_p = \emptyset$.



AWAZING PERSON



Sumber: id.wikipedia.org

GOTTFRIED WILHEM LEIBNIZ (1646-1716)

Matematikawan, Diplomat, dan Ahli Fisika

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah seorang filsuf Jerman keturunan Sorbia dan berasal dari Sachsen. Ia terutama terkenal karena paham *Theodicee* bahwa manusia hidup dalam dunia yang sebaik mungkin karena dunia ini diciptakan oleh Tuhan Yang Sempurna. Paham *Theodicee* ini menjadi terkenal karena dikritik dalam buku *Candide* karangan **Voltaire**. Ayah Leibniz, Friedrich Leibniz, merupakan seorang ahli hukum dan profesor dalam bidang etika dan ibunya adalah putri seorang ahli hukum pula. Gottfried Leibniz telah belajar bahasa Yunani dan bahasa Latin pada usia 8 tahun berkat kumpulan buku-buku ayahnya yang luas. Pada usia 12 tahun, ia telah mengembangkan beberapa hipotesa logika yang menjadi bahasa simbol matematika.

Selain sebagai seorang matematikawan, ia adalah seorang filsuf. Ia dianggap sebagai *Jiwa Universalis* pada zamannya dan merupakan salah seorang filsuf yang paling berpengaruh pada abad ke-17 dan ke-18. Kontribusinya kepada subjek yang begitu luas tersebar di banyak jurnal dan puluhan ribu surat serta naskah manuskrip yang belum semuanya diterbitkan. Sampai sekarang, masih belum ada edisi lengkap mengenai tulisan-tulisan Leibniz.

Sumber: id.wikipedia.org

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui sistem persamaan $\begin{cases} y = x + n \\ y = 2x^2 + 3x - 5 \end{cases}$

- Berapakah nilai n agar sistem persamaan di atas tepat mempunyai satu anggota penyelesaian?
- Berapakah himpunan penyelesaiannya?

Jawab:

- Substitusikan $y = n + x$ ke persamaan $y = 2x^2 + 3x - 5$ sehingga

$$n + x = 2x^2 + 3x - 5$$

$$2x^2 + 2x - (5 + n) = 0$$

Syarat mempunyai tepat satu anggota himpunan penyelesain adalah $D = 0$.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$4^2 + 4(2)(5 + n) = 0$$

$$16 + 40 + 8n = 0$$

$$\text{Jadi, } n = -7.$$

- Sistem persamaan $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = 2x^2 + 3x - 5 \end{cases}$

Substitusikan $y = x - 7$ ke persamaan $y = 2x^2 + 3x - 5$ sehingga

$$x - 7 = 2x^2 + 3x - 5$$

$$2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = -3 \rightarrow D < 0$$

$$\text{Jadi, } H_p = \emptyset.$$

Tanya:

Diketahui sistem persamaan: $\begin{cases} y = mx - 14 \\ y = 2x^2 + 5x - 12 \end{cases}$

Carilah batas-batas nilai m agar garis memotong parabola di dua titik yang berlainan.

Jawab:

Substitusikan $y = mx - 14$ ke persamaan $y = 2x^2 + 5x - 12$ sehingga

$$mx - 14 = 2x^2 + 5x - 12$$

$$2x^2 + (5 - m)x + 2 = 0$$

Syarat agar garis memotong parabola di dua titik yang berlainan adalah $D > 0$.

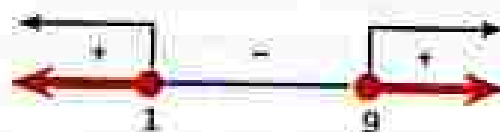
$$b^2 - 4ac > 0$$

$$(5 - m)^2 - 4(2)(2) > 0$$

$$25 - 10m + m^2 - 16 > 0$$

$$m^2 - 10m + 9 > 0$$

$$(m - 1)(m - 9) > 0$$



Jadi, batas-batas nilai m adalah $m < 1$ atau $m > 9$.

3. Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat dengan Bagian Bentuk Implisit

Bentuk-bentuk yang telah kita pelajari, seperti $y = 3x - 5$, $x = 4y - 4$, $y = x^2 - 2x - 4$, dan $x = y^2 + y + 6$ adalah bentuk eksplisit karena persamaan-persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ atau $x = f(y)$.

Jika suatu persamaan tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ atau $x = f(y)$ maka persamaan tersebut dalam bentuk implisit.

Sistem persamaan linear dan kuadrat dengan bagian kuadrat bentuk implisit dapat dinyatakan:

$$\begin{cases} px + qy + r = 0 & \text{... persamaan linear} \\ ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 & \text{... persamaan kuadrat} \end{cases}$$

di mana p, q, r, a, b, c, d, e , dan $f \in \mathbb{R}$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dan kuadrat dengan bagian kuadrat bentuk implisit berikut.

$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Dari persamaan $2x - y - 8 = 0$ diperoleh $y = 2x - 8$.

Kemudian, substitusikan $y = 2x - 8$ ke persamaan $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ sehingga

$$x^2 + 4x(2x - 8) + 4(2x - 8)^2 + 2x + 4(2x - 8) + 1 = 0$$

$$x^2 + 8x^2 - 32x + 4(4x^2 - 32x + 64) + 2x + 8x - 32 + 1 = 0$$

$$x^2 + 8x^2 - 32x + 16x^2 - 128x + 256 + 2x + 8x - 32 + 1 = 0$$

$$25x^2 - 150x + 225 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

Substitusikan $x = 3$ ke $y = 2x - 8$ sehingga

$$2(3) - 8 = 6 - 8 = -2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(3, -2)\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dan kuadrat dengan bagian kuadrat bentuk implisit berikut?

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x^2 - xy - 2y^2 - x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x^2 - xy - 2y^2 - x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Dari persamaan $3x + y = 7$ diperoleh $y = 7 - 3x$.

Kemudian, substitusikan $y = 7 - 3x$ ke persamaan $x^2 - xy - 2y^2 - x - 4y - 2 = 0$ sehingga

$$x^2 - x(7 - 3x) - 2(7 - 3x)^2 - x - 4(7 - 3x) - 2 = 0$$

$$x^2 - 7x + 3x^2 - 2(49 - 42x + 9x^2) - x - 28 + 12x - 2 = 0$$

$$x^2 - 7x + 3x^2 - 98 + 84x - 18x^2 - x - 28 + 12x - 2 = 0$$

$$-14x^2 + 88x - 128 = 0$$

$$-7x^2 + 44x - 64 = 0$$

$$(-7x + 16)(x - 4) = 0$$

$$x = \frac{16}{7} \text{ atau } x = 4$$

Substitusikan nilai-nilai x tersebut ke persamaan $y = 7 - 3x$.

$$\text{Untuk } x = \frac{16}{7} \rightarrow y = 7 - 3\left(\frac{16}{7}\right) = \frac{49 - 48}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{Untuk } x = 4 \rightarrow y = 7 - 3(4) = 7 - 12 = -5$$

$$\text{Jadi, Hp} = \left\{ \left(\frac{16}{7}, \frac{1}{7} \right), (4, -5) \right\}.$$

Tanya:

Berapakah nilai p agar sistem persamaan linear dan kuadrat dengan bagian kuadrat bentuk

$$\text{implisit } \begin{cases} y - px = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0 \end{cases} \text{ tepat mempunyai satu anggota penyelesaian?}$$

Jawab:

Dari persamaan $y - px = 0$ diperoleh $y = px$.

Kemudian, substitusikan $y = px$ ke persamaan $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ sehingga

$$x^2 + (px)^2 - 8x - 4(px) + 16 = 0$$

$$x^2 + p^2x^2 - 8x - 4px + 16 = 0$$

$$(1 + p^2)x^2 - (8 + 4p)x + 16 = 0$$

Syarat tepat mempunyai satu penyelesaian adalah $D = b^2 - 4ac = 0$.

$$[-(8 + 4p)]^2 - 4(1 + p^2)(16) = 0$$

$$64 + 64p + 16p^2 - 64 - 64p^2 = 0$$

$$64p - 48p^2 = 0$$

$$4p - 3p^2 = 0$$

$$p(4 - 3p) = 0$$

$$p = 0 \vee p = \frac{4}{3}$$

$$\text{Jadi, nilai } p = 0 \vee p = \frac{4}{3}$$

ASAHI OTAK

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN KUADRAT

1. Tentukan himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear dan kuadrat berikut.

a.
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 + 6x - 9 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 - 5x + 11 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = x^2 + 2x - 9 \end{cases}$$

2. Tentukan banyaknya anggota himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan berikut.

a.
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 + 3x - 4 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 + x - 5 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$$

3. Diketahui sistem persamaan:
$$\begin{cases} y = x - \frac{1}{2} \\ y = mx^2 - (m+3)x - 1 \end{cases}$$
. Berapakah nilai m agar garis

memotong parabola di satu titik dan tentukan akar penyelesaiannya?

4. Berapakah batasan nilai p agar:

a. garis $y = 2x + p$ dan parabola $y = x^2 + 6x - 5$ berpotongan di dua titik.

b. garis $y = x + 3$ dan parabola $y = mx^2 - 5x + 11$ bersinggungan.

5. Diketahui garis $y = 3x - m$ dan parabola $y = x^2 + mx - 3$ tidak saling berpotongan ataupun bersinggungan. Berapakah batas-batas nilai m yang memenuhi.

6. Carilah himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan berikut.

a.
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$$

7. Berapakah panjang segmen garis yang menghubungkan titik-titik potong parabola $y = 2x^2 + 3x + 5$ dengan garis $y = 11 - x$?

8. Carilah himpunan penyelesaian dari setiap sistem persamaan linear dan kuadrat dengan bagian kuadrat bentuk implisit berikut.

a.
$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 9x^2 + 6xy - 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0 \\ x^2 + 5xy - 4y^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

D. Sistem Persamaan Kuadrat dan Kuadrat

1. Bentuk Umum Sistem Persamaan Kuadrat dan Kuadrat

Dua atau lebih persamaan kuadrat akan membentuk sistem persamaan kuadrat dan kuadrat. Secara umum, sistem persamaan kuadrat dan kuadrat mempunyai bentuk umum sebagai berikut.

$$\begin{cases} y = px^2 + qx + r \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}, \text{ di mana } p, q, r, a, b, \text{ dan } c \in \mathbb{R}, p, a \neq 0.$$

Berikut adalah beberapa contoh dari sistem persamaan kuadrat dan kuadrat.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} y = 3x^2 - 18x + 27 \\ y = x^2 + 3 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x^2 + 4x - 6 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x^2 - 9 \end{cases} \end{array}$$

2. Penyelesaian Sistem Persamaan Kuadrat dan Kuadrat

Penyelesaian dari sistem persamaan linear dan kuadrat pada dasarnya sama dengan pengertian penyelesaian pada sistem persamaan linear dengan dua atau tiga variabel, yaitu sepasang nilai x dan y yang apabila disubstitusikan ke sistem persamaannya akan menjadikan sistem persamaan tersebut bernilai benar.

Penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} y = px^2 + qx + r \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Substitusikan $y = px^2 + qx + r$ ke persamaan $y = ax^2 + bx + c$
 $px^2 + qx + r = ax^2 + bx + c$
 $(a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0$ (jadikan ruas kanan sama dengan nol)
sehingga dengan menyelesaikan persamaan kuadrat tersebut di atas, maka akan diperoleh nilai x .
2. Kemudian, nilai-nilai x yang diperoleh (jika ada) dari langkah 1 disubstitusikan ke persamaan $y = px^2 + qx + r$ atau $y = ax^2 + bx + c$ sehingga diperoleh nilai y .

Dari langkah 1, kita mendapatkan persamaan kuadrat $(a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0$. Banyaknya anggota himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat dan kuadrat dapat ditentukan dengan menggunakan diskriminan.

Diskriminan dari $(a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0$ adalah $D = (b - q)^2 - 4(a - p)(c - r)$.

1. Jika $D > 0$ maka sistem persamaan mempunyai dua anggota himpunan penyelesaian,
2. jika $D = 0$ maka sistem persamaan mempunyai satu anggota himpunan penyelesaian, dan
3. jika $D < 0$ maka sistem persamaan tidak mempunyai himpunan penyelesaian atau $H_p = \emptyset$.

Contoh:

Jika (x_0, y_0) adalah penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} y = px^2 + qx + r \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$

maka berlaku $y_0 = p(x_0)^2 + qx_0 + r$ dan $y_0 = a(x_0)^2 + bx_0 + c$.

Adapun himpunan penyelesaiannya ditulis $\{(x_0, y_0)\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut. Bagaimanakah gambar sketsa grafiknya?

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Substitusikan $y = -x^2 + 2x + 3$ ke persamaan $y = x^2 - 4x + 3$ sehingga:

$$-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 3$$

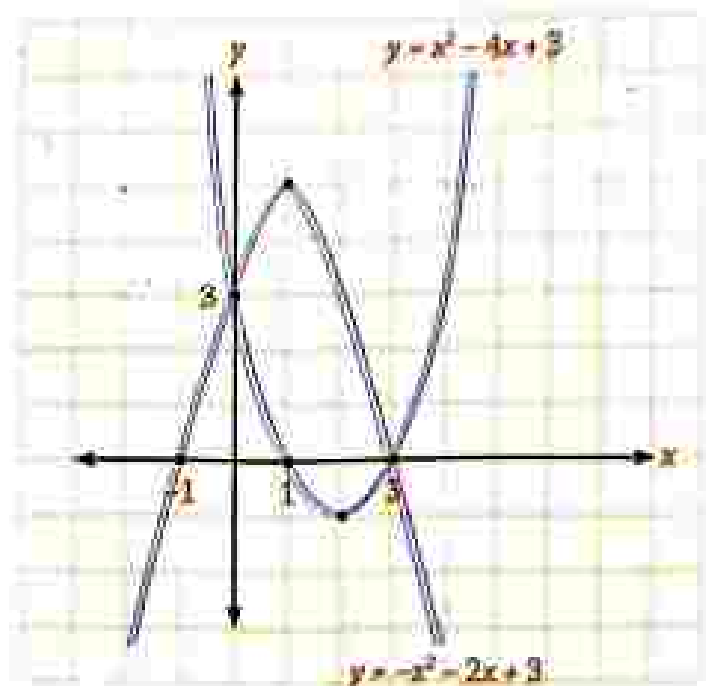
Substitusikan nilai-nilai x yang diperoleh ke salah satu persamaan, misalnya $y = -x^2 + 2x + 3$, sehingga

$$x = 0 \rightarrow y = -(0)^2 + 2(0) + 3 = 3$$

$$x = 3 \rightarrow y = -(3)^2 + 2(3) + 3 = 0$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(0, 3), (3, 0)\}$.

Grafik sistem persamaan tersebut dapat dilihat pada gambar berikut.



TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut dan gambariah sketsa grafiknya.

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = -x^2 + x + 4 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = -x^2 + x + 4 \end{cases}$$

Substitusikan $y = x^2 - 7x + 12$ ke persamaan $y = -x^2 + x + 4$ sehingga

$$x^2 - 7x + 12 = -x^2 + x + 4$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

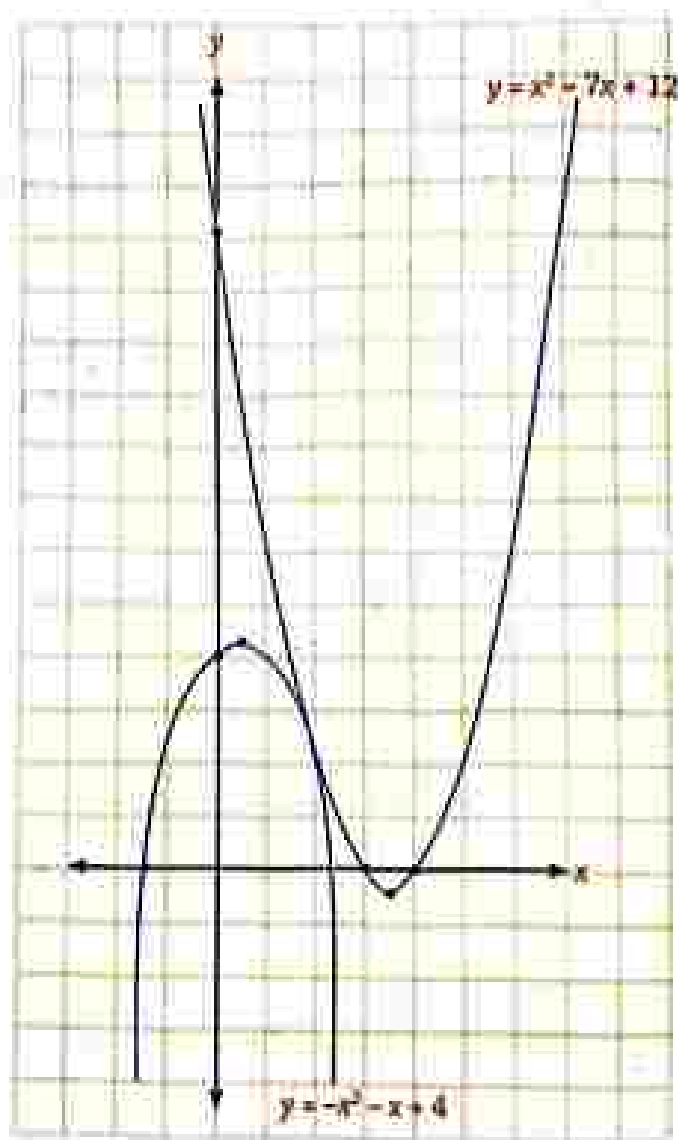
$$x = 2$$

Substitusikan nilai x ke salah satu persamaan, misalnya $y = x^2 - 7x + 12$ sehingga

$$y = (2)^2 - 7(2) + 12 = 4 - 14 + 12 = 2.$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(2, 2)\}$.

Grafiknya dapat dilihat pada gambar di samping.



TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah himpunan penyelesaian dari tiap sistem persamaan berikut dan gambarkan sketsa grafiknya.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = -x^2 - x + 2 \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = -x^2 - x + 2 \end{cases}$$

Substitusikan $y = x^2 - 2x + 3$ ke persamaan $y = -x^2 - x + 2$ sehingga

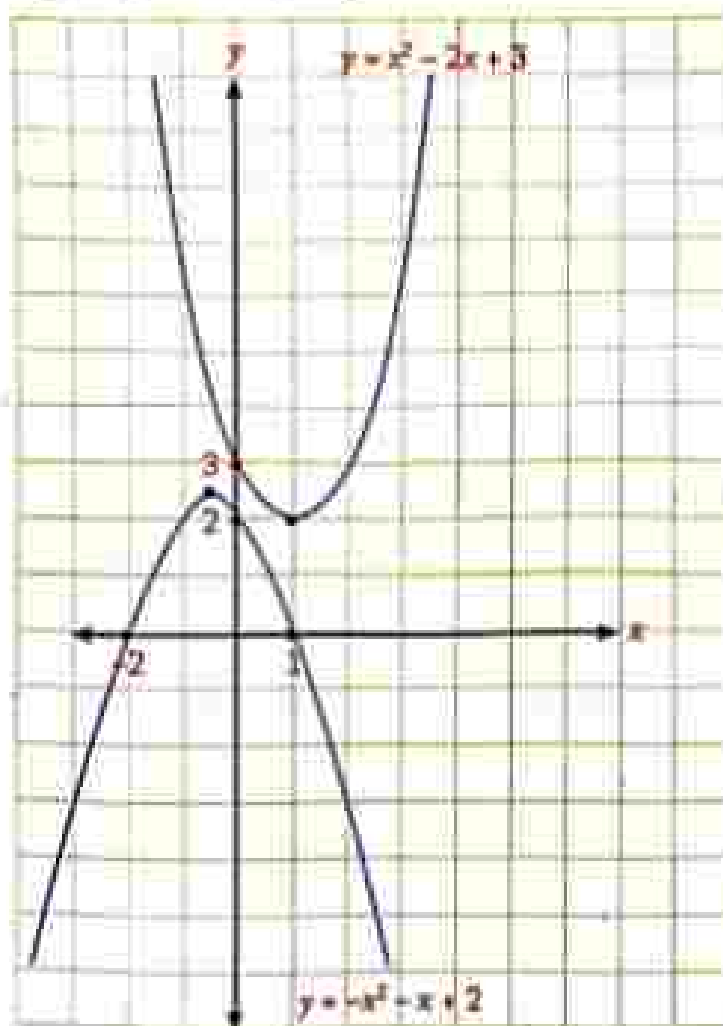
$$x^2 - 2x + 3 = -x^2 - x + 2$$

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(1) = 1 - 8 = -7 \rightarrow D < 0$$

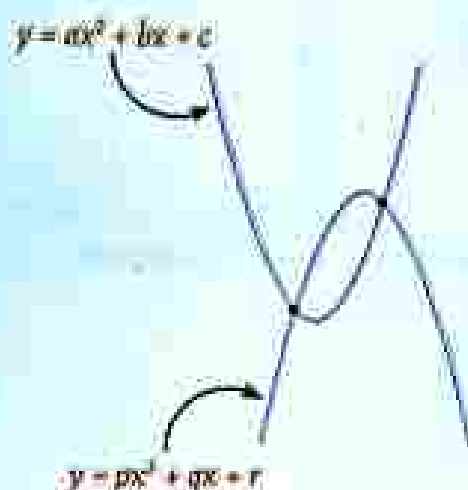
Jadi, $H_p = \emptyset$.

Grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut.

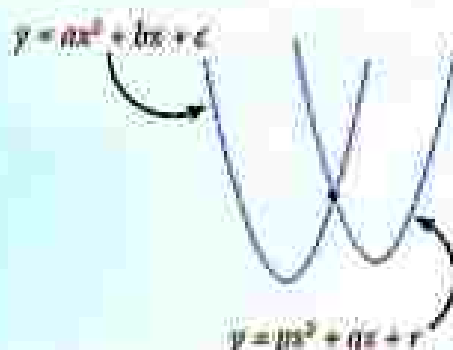


Banyaknya anggota himpunan penyelesaian dari $\begin{cases} y = px^2 + qx + r \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ berdasarkan nilai diskriminannya, yaitu $D = (b - q)^2 - 4(a - p)(c - r)$ adalah sebagai berikut.

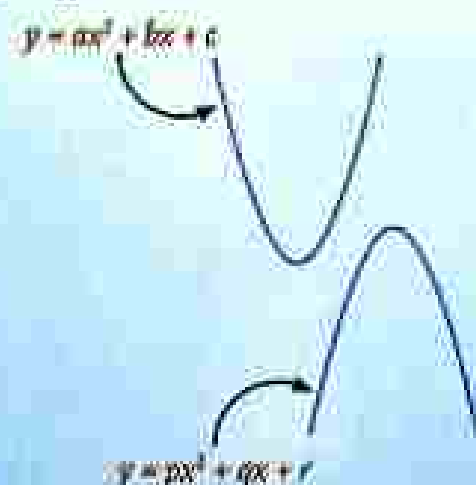
1. Jika $D > 0$, sistem persamaan mempunyai dua anggota pada himpunan penyelesaian atau grafiknya berpotongan di dua titik yang berbeda.



2. $D = 0$, sistem persamaan mempunyai tepat satu anggota pada himpunan penyelesaian atau grafiknya berpotongan di satu titik saja.



3. $D < 0$, sistem persamaan tidak mempunyai anggota pada himpunan penyelesaian atau grafiknya tidak berpotongan.



TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui sistem persamaan $\begin{cases} y = 2x^2 - kx - 10 \\ y = x^2 + kx + 5 \end{cases}$ mempunyai himpunan penyelesaian

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ dengan $x_1 - x_2 = 8$. Berapakah nilai k dan carilah himpunan penyelesaiannya?

Jawab:

Substitusikan $y = 2x^2 - kx - 10$ ke persamaan $y = x^2 + kx + 5$ sehingga

$$2x^2 - kx - 10 = x^2 + kx + 5$$

$$x^2 - 2kx - 15 = 0$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = 8$$

$$\frac{\sqrt{(-2k)^2 - 4(1)(-15)}}{1} = 8 \quad (\text{kuadratkan kedua ruas})$$

$$4k^2 + 60 = 64$$

$$4k^2 = 4$$

$$k^2 = 1$$

$$k = -1 \text{ atau } k = 1$$

Substitusikan nilai-nilai k ke persamaan $y = x^2 + kx + 5$ dan $y = 2x^2 - kx - 10$ sehingga untuk $k = -1 \rightarrow y = x^2 + kx + 5$

$$y = x^2 - x + 5$$

$$y = 2x^2 - kx - 10$$

$$y = 2x^2 + x - 10$$

Substitusikan $y = x^2 - x + 5$ ke persamaan $y = 2x^2 + x - 10$ sehingga

$$x^2 - x + 5 = 2x^2 + x - 10$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x = -5 \text{ atau } x = 3$$

Substitusikan nilai-nilai x ke persamaan $y = x^2 - x + 5$ sehingga

$$\text{untuk } x = -5 \rightarrow y = (-5)^2 - (-5) + 5 = 35$$

$$\text{untuk } x = 3 \rightarrow y = (3)^2 - (3) + 5 = 11$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(-5, 35), (3, 11)\}$.

LET'S DO IT

Perhatikan kembali Tanya & Jawab di atas.

Untuk $k = 1$, bagaimana penyelesaian? Diskusikan dengan teman sebangkumu.



ASAHI OTAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN KUADRAT DAN KUADRAT

1. Carilah himpunan penyelesaian dari tiap sistem persamaan kuadrat dan kuadrat berikut.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} y = x^2 + 5x - 6 \\ y = -3x^2 + 9x - 7 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} y = 3x^2 + 2x - 8 \\ y = 2x^2 + 4x - 5 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - 6 \\ y = \frac{14}{15}x^2 + x - 10 \end{cases} \end{array}$$

2. Carilah himpunan penyelesaian dari tiap sistem persamaan kuadrat dan kuadrat berikut dan gambarkan sketsa grafiknya.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} y = -x^2 + 5x - 7 \\ y = 8 + 2x - x^2 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 3 \\ y = 2x^2 + 2x - 2 \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} y = 3x^2 + 5x + 7 \\ y = x^2 - 3x - 1 \end{cases} \end{array}$$

3. Diketahui sistem persamaan $\begin{cases} y = x^2 + 3x + 1 \\ y = -x^2 + x - m \end{cases}$ tepat mempunyai satu anggota dalam

himpunan penyelesaian. Berapakah nilai m dan apakah himpunan penyelesaiannya?

4. Dapatkah kamu menentukan batas-batas nilai p agar setiap sistem persamaan berikut ini sekurang-kurangnya mempunyai satu anggota dalam himpunan penyelesaiannya?

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{cases} y = px^2 - 4x + 5 \\ y = 2px^2 + 2x - 4 \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} y = 2x^2 + p \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \end{array}$$

5. Berapakah panjang segmen garis yang menghubungkan titik-titik potong parabola $y = x^2 + 2x + 1$ dengan parabola $y = -x^2 + 2x + 9$?

6. Diketahui sistem persamaan $\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + p \\ y = 3x^2 + ax + p \end{cases}$. Berapakah nilai a agar sistem persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tak berhingga banyaknya?

7. Diketahui sistem persamaan $\begin{cases} y = mx^2 + 3x + 5 \\ y = x^2 - 4x + 7 \end{cases}$

- a. Berapakah nilai m jika salah satu penyelesaiannya berabsis tiga?
b. Apakah himpunan penyelesaiannya?

8. Tentukan hubungan setiap pasangan parabola berikut.

- a. $y = 2x^2 + 5x - 2$ dan $y = x^2 + x + 10$
b. $y = x^2 + 4x + 1$ dan $y = x^2 + x - 1$
c. $y = 2x^2 + x + 5$ dan $y = x^2 + 2x - 1$



AMAZING PERSON

OMAR KHAYYAM (1048-1122)

Matematikawan dan Penyair



Sumber: www.istiqomah.org

Omar Khayyam dilahirkan di Nishapur, Iran. Nama aslinya adalah **Ghiyâtsuddin Abulfatah 'Umar bin Ibrahim Khayyâmi Nisyâburi**. Dalam bahasa Persia, *Khayyam* berarti "pembuat tenda".

Pada masa hidupnya, ia terkenal sebagai seorang matematikawan dan astronom yang memperhitungkan bagaimana mengoreksi kalender Persia. Pada 15 Maret 1079, **Sultan Jalaluddin Maliksyah Saljuqi** memberlakukan kalender yang telah diperbaiki Omar, seperti yang dilakukan oleh **Julius Caesar** di Eropa pada tahun 46 SM dengan koreksi terhadap *Sosigenes*, dan yang dilakukan oleh **Paus Gregorius XIII** pada Februari 1552 dengan kalender yang telah diperbaiki **Aloysius Lilius** (meskipun Britania Raya baru beralih dari kalender Julian kepada kalender Gregorian pada 1751, dan Rusia baru melakukannya pada 1918).

Pada tahun 1073, **Malik-Syah**, penguasa Isfahan, mengundang Khayyam bersama sejumlah ilmuwan terkemuka lainnya untuk membangun dan bekerja pada sebuah observatorium. Dengan sangat akurat (mengoreksi hingga enam desimal di belakang koma), Khayyam mengukur panjang satu tahun sebagai 365,24219858156 hari.

Omar Khayyam kini terkenal bukan hanya keberhasilan ilmiahnya, tetapi karena karya-karya sastranya. Ia diyakini telah menulis sekitar seribu puisi 400 baris. Di dunia berbahasa Inggris, ia paling dikenal karena *The Rubâiyât of Omar Khayyam* dalam terjemahan bahasa Inggris oleh **Edward Fitzgerald** (1809-1883).

Sumber: www.istiqomah.com

INFO MATEMATIKA

www.invir.com

Situs ini berisi soal-soal latihan berbagai mata pelajaran yang di-Ujian Nasional-kan. Salah satunya adalah matematika. Latihan soal-soal yang ada di situs ini dibatasi waktu pengerjaan dan koreksi jawaban. Dengan mengerjakan soal-soal di situs ini, kamu dapat melatih kemampuannya menguasai materi matematika yang telah dipelajari.



LET'S ACT

Dalam kehidupan sehari-hari, sebenarnya kalian sering dihadapkan suatu permasalahan yang secara tidak sadar berhubungan dengan sistem persamaan linear dan kuadrat. Berikut disajikan beberapa permasalahan yang berkaitan dengan pokok bahasan yang telah kalian pelajari. Kerjakanlah bersama kelompok belajar kalian.

Petunjuk:

1. Buatlah 5 kelompok yang terdiri atas 3-4 orang.
2. Setiap anggota kelompok menyelesaikan setiap permasalahan berikut (± 20 menit).
3. Diskusikan penyelesaian yang diperoleh setiap anggota kelompok (± 20 menit).
4. Setiap kelompok mempresentasikan penyelesaian satu permasalahan, misalnya kelompok 1 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 1, kelompok 2 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 2, dan seterusnya. Jika kelompok lain memiliki langkah penyelesaian yang berbeda untuk permasalahan yang sama maka kelompok tersebut juga mempresentasikan penyelesaiannya tersebut (± 40 menit).

Permasalahan 1:

Perbandingan uang Ajeng dan Dimas adalah 7 : 3. Jika uang mereka dijumlahkan, hasilnya adalah Rp6.000,00. Ajeng membagi uang yang dimilikinya dengan ibunya, dan adiknya, dan dia sendiri dengan perbandingan 3 : 1 : 1 : 5. Berapa uang yang diterima Ibu Ajeng?



Sumber: www.kemendiknas.go.id
©2013 jombangkajawa



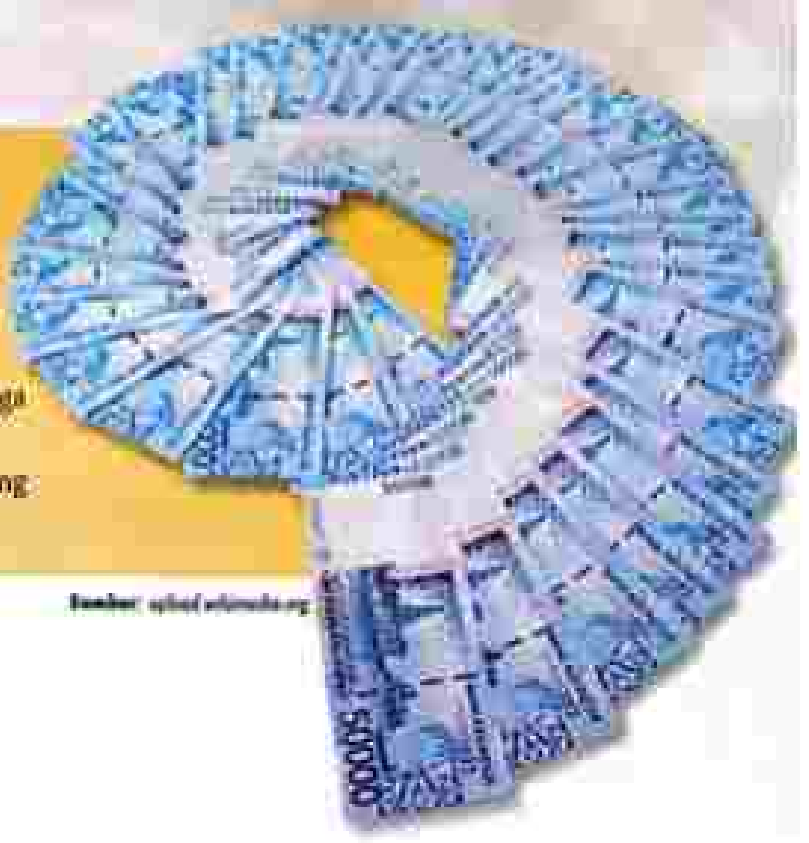
Sumber: www.pinterest.com

Permasalahan 2

Untuk suatu acara pertunjukan musik, dijual tiket dengan kriteria: tiket untuk orang dewasa seharga Rp33.000,00; tiket untuk remaja seharga Rp24.000,00, dan tiket untuk anak-anak seharga Rp9.000,00. Pada hari pembukaan, jumlah tiket untuk anak-anak dan remaja terjual 60 lebih banyak dari $\frac{1}{2}$ tiket dewasa yang terjual. Jumlah tiket untuk remaja yang terjual 5 lebih banyak dari 4 kali jumlah tiket untuk anak-anak yang terjual. Jika jumlah penjualan tiket seluruhnya Rp89.820.000,00, berapa banyak remaja yang menonton pertunjukan musik tersebut?

Permasalahan 3:

Dalam satu tahun, Ajeng memperoleh bunga sebesar Rp1.100.000,00 dari dua deposito miliknya yang berbunga 4% dan 5%. Jika jumlah uang yang berbunga 4% ditukar dengan jumlah uang yang berbunga 5% maka Ajeng akan memperoleh bunga sebesar Rp1.150.000,00. Berapa besar uang yang didepositokan Ajeng?



Sumber: giphy.com

Permasalahan 4:

Sebuah kapal laut berlayar dari pelabuhan A ke pelabuhan B pergi-pulang selama $7\frac{1}{2}$ hari.

Kapal pergi dengan kecepatan 64 km/hari dan pulang dengan kecepatan 56 km/hari. Berapa jarak pelabuhan A ke pelabuhan B?



Sumber: www.ig.com

Permasalahan 5:

Paman Dimas bekerja di sebuah pabrik pengepakan. Paman Dimas hanya bekerja 3 hari dalam seminggu, yaitu pada hari Selasa, Kamis, dan Sabtu. Selama seminggu bekerja, ia dapat mengepak 87 paket. Pada hari Selasa, dia mengepak 15 paket lebih banyak dibanding hari Sabtu. Pada hari Kamis, ia mengepak 3 paket lebih sedikit dibanding hari Selasa. Berapa banyak paket yang dapat dikerjakan Paman Dimas di setiap hari kerjanya?

1. Bentuk umum dari sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ di mana } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, \text{ dan } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Adapun himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan dua variabel dituliskan $\{(x, y)\}$.

2. Bentuk umum dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}, \text{ di mana } a_1, b_1, \dots, d_2, d_3 \in \mathbb{R}.$$

Adapun himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel dituliskan $\{(x, y, z)\}$.

3. Penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua dan tiga variabel, dapat dicari dengan menggunakan beberapa cara, yaitu eliminasi, substitusi, dan gabungan eliminasi dan substitusi.

4. Bentuk umum sistem persamaan linear dan kuadrat secara umum ditulis

$$\begin{cases} y = px + q \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}, \text{ di mana } p, q, a, b, \text{ dan } c \in \mathbb{R}, p, a \neq 0.$$

Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dan kuadrat dituliskan

$$\{(x_1, y_1)(x_2, y_2)\}.$$

5. Bentuk umum sistem persamaan kuadrat dan kuadrat secara umum ditulis

$$\begin{cases} y = px^2 + qx + r \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}, \text{ di mana } p, q, r, a, b, \text{ dan } c \in \mathbb{R}, p, a \neq 0.$$

Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan kuadrat dan kuadrat dituliskan

$$\{(x_1, y_1)(x_2, y_2)\}.$$

6. Penyelesaian sistem persamaan linear dan kuadrat serta kuadrat dan kuadrat, dapat dicari dengan menggunakan substitusi.

Ujilah pemahamanmu dengan mengerjakan **Kuis 3** di halaman 328.

Mukadimah

Setiap pribadi manusia mempunyai peranan dan posisinya masing-masing tanpa memedulikan ras, bangsa, kelompok, dan jenis jender. Bahkan tidak hanya manusia, makhluk tidak berakal pun mempunyai peranannya dalam lingkaran kehidupan, misalnya lalat dan nyamuk. Hal ini tidak semata dibuktikan oleh hasil penelitian para ilmuwan yang dimulai dari zaman Yunani kuno hingga sekarang, namun juga telah difirmankan oleh Allah Swt. dalam surat Al-Baqarah ayat 26, "Sesungguhnya Allah tidak akan merasa segan untuk menjadikan nyamuk sebagai perumpamaan, bahkan meski binatang yang lebih kecil darinya sekalipun [inna Allah la yastahyil ay-yadhriba mastalan ma ba'udhah fa ma fauqaha]"

Kembali pada peranan manusia, secara gamblang dan nyata, dalam Al Quran surat Al-An'am ayat 135, dinyatakan bahwa, "Katakan (Muhammad), berbuatlah sesuai dengan posisi kalian masing-masing. Sebab akupun berperan sebagaimana peranan diriku [Qul l'maluu 'Ala Makanatikum, Fa Inni 'Amil]". Begitu pula yang tercatat dalam surat Hud ayat 93 dan 121, serta Az-Zumar ayat 39.

Di dalam Al Quran, telah ditegaskan bahwa tujuan keberadaan manusia adalah saling berkompetisi untuk menjadi yang terbaik. Yaitu, yang mempunyai andil dan partisipasi yang terbaik di dalam kehidupan dunia ini. Hal ini sebagaimana yang tercantum dalam surat al-Mulk ayat 2 berikut ini, "Dialah zat yang mengadakan mati dan hidup, untuk menguji siapakah di antara kalian yang terbaik perbuatannya [Al-ladzi khalaqa al-Mawta wa al-Haya li yabluakum Ayyukum ahsanu 'amala]".

Oleh karena itu, adanya perbedaan posisi dan status sosial, serta jarak yang berbeda atau tidak seimbang antara sekelompok individu dengan kelompok lainnya, dalam Islam merupakan suatu kewajaran. Begitu juga dengan keniscayaan dan kepastian. Tanpa semua itu, tidak akan ada perbedaan yang unik antara satu individu dengan yang lainnya. Berbeda tentunya jika tidak ada keragaman dalam kehidupan manusia, yang sebelumnya mengondisikan adanya perbedaan pada beragam hal. Dalam bahasa umum, hal tersebut sudah menjadi *sunnatullah (the natural law)*.

Misalnya, ketika kita berbicara tentang kondisi keuangan. Pembagian setiap kelompok individu menjadi kategori orang yang mampu (*the have*) dengan orang yang tidak punya (*the poor*) bukanlah sebuah pertentangan. Melainkan hanya 'pembagian peran' semata. Jika ada orang mampu, tentu ada orang yang tidak mampu. Bila ada anak-anak, tentu ada orang dewasa. Ada orang bisa karena ada orang yang tidak bisa. Setiap individu akan mengalami setiap fasenya tanpa terkecuali. Di setiap masa atau fase itulah, akan diketahui predikat ketulusan ujian tiap individu. Jika ada seorang individu lulus dalam ujian keberlimpahan harta benda maka tentu di suatu waktu ia akan diuji serba kekurangan. Tidak ada sebuah jaminan apa pun jika pada suatu fase tertentu berhasil maka pada tingkatan berikutnya ia juga akan tetap berhasil atau sebaliknya.

Inilah yang secara gamblang disampaikan oleh Allah Swt. dalam Al Quran surat Al-Baqarah ayat 155 sebagai berikut, "Dan sungguh akan Kami berikan ujian kepada kalian berupa ketakutan, kelaparan, kekurangan harta, jiwa, dan

buah-buahan. Dan berilah kabar gembira kepada orang-orang yang bisa bersabar. Yaitu, orang-orang yang jika diberi musibah, mereka berkata 'Sesungguhnya kami milik Allah. Dan kepada Allah kami akan kembali [Walanabluwannakum bi sya'i min al-khauf, wa al-ju', wa naqs min al-amwal, wa al-anfus, wa samarat. Wa basysyir ash-shabirin al-ladzina idza ashhabathum mushibah, qaafu inna lillahi wa inna ilaihi rajiun].'

Bahkan lebih jauh dari itu, melewati batas rasionalitas kemanusiaan, berkaitan dengan seorang individu yang tidak punya (miskin) umpamanya, ternyata tetap tidak terlepas dari rancangan Allah, Sang Maha Tahu (al-'Alim), yang demikian sayang dan cinta-Nya kepada para makhluk-Nya. Hal ini misalnya bisa kita cermati dari sebuah hadist qudsi yang disampaikan Rasulullah Saw. dari Tuhannya berikut ini, "Sesungguhnya ada di antara hamba-hamba-Ku yang tidak tepat bagi mereka kecuali kefakiran. Seandainya mereka diberi kelebihan, niscaya akan celaka [Inna min 'ibadii, man la yushlihu illa al-faqr. Fa in a'thaituhu, lahaka]." Jadi, pada ujung segalanya, sikap bersyukur pada saat kita diberi kelebihan dan bersabar pada saat kita diberi ujian, merupakan sebaik-baiknya persiapan dan benteng pertahanan.

Wallahu a'lam bi ash-Shawwab





Sumber: www.saransatirel.com

PILIH KURANG ATAU LEBIH?

Manfaat:

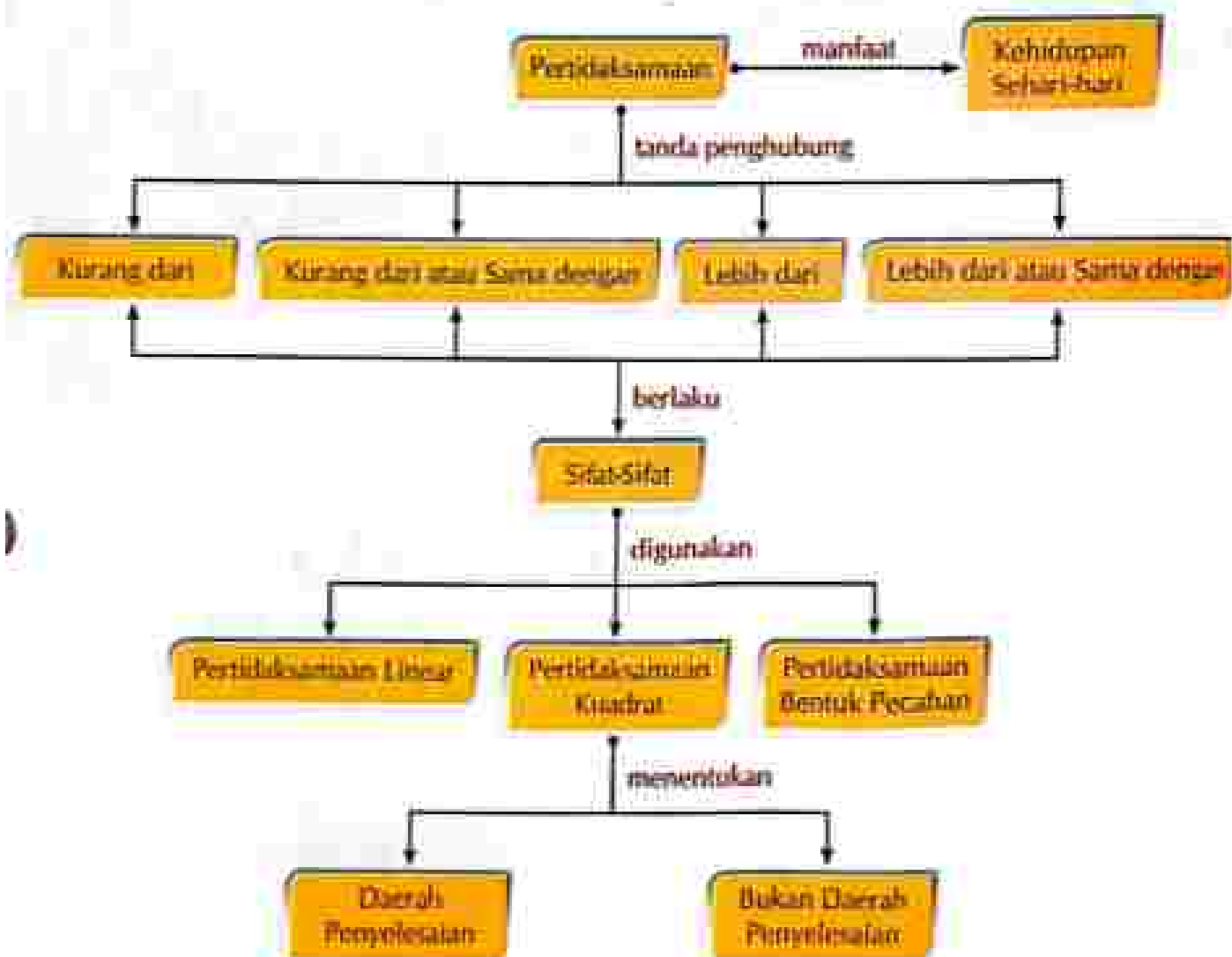
Kamu dapat menyelesaikan persoalan yang berhubungan dengan kurang atau lebih, yang dalam bahasa matematika disebut pertidaksamaan. Selain itu, kamu akan terlatih untuk menyikapi setiap masalah secara logis dan sistematis.

Kata kunci: *Pertidaksamaan, linear, dan kuadrat*

Kita dapat menyelesaikan beberapa permasalahan matematika yang sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari dengan menggunakan pertidaksamaan.

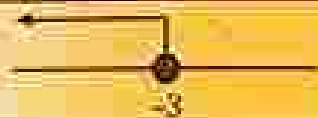
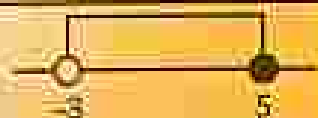
Sebagai contoh, sebuah kolam renang dibuat berbentuk persegi panjang dengan keliling 50 m. Jika luas kolam tersebut paling sedikit 136 m^2 , berapakah ukuran panjang kolam renang yang memenuhi syarat tersebut?

MIND MAP



A. Pengertian dan Notasi Pertidaksamaan

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda " $<$ " (kurang dari), " $>$ " (lebih dari), " $\leq$ " (kurang dari atau sama dengan), dan " $\geq$ " (lebih dari atau sama dengan). Pertidaksamaan dapat digambarkan dengan menggunakan garis bilangan (selang/interval). Tanda " $<$ " dan " $>$ " dinyatakan dengan selang terbuka " $()$ ", sedangkan " $\leq$ " dan " $\geq$ " dinyatakan dengan selang tertutup " $[]$ ".

Pertidaksamaan	Dinyatakan dengan Garis Bilangan	Dinyatakan dengan Kalimat
$x < 3$		x kurang dari 3
$x > 10$		x lebih dari 10
$x \leq -3$		x kurang dari atau sama dengan -3
$x \geq 5$		x lebih dari atau sama dengan 5
$-3 < x \leq 5$		x lebih dari -3 dan kurang dari atau sama dengan 5
$-3 \leq x \leq 5$		x lebih dari atau sama dengan -3 dan kurang dari atau sama dengan 5

1. Sifat-Sifat Pertidaksamaan

a. Penambahan dan Pengurangan Bilangan atau Bentuk Aljabar ke dalam Pertidaksamaan

Pertidaksamaan dapat ditambah atau dikurangi dengan bilangan atau bentuk aljabar, dengan syarat penambahan dan pengurangan tersebut dilakukan terhadap kedua ruas.

Pertidaksamaan	Secara Aritmetika	Secara Aljabar
$1 < 6$	$1 + 5 < 6 + 5$	Jika $p < q$ maka $p + r < q + r$
	$1 - 3 < 6 - 3$	Jika $p < q$ maka $p - r < q - r$
$8 > 2$	$8 + 5 > 2 + 5$	Jika $p > q$ maka $p + r > q + r$
	$8 - 3 > 2 - 3$	Jika $p > q$ maka $p - r > q - r$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut?

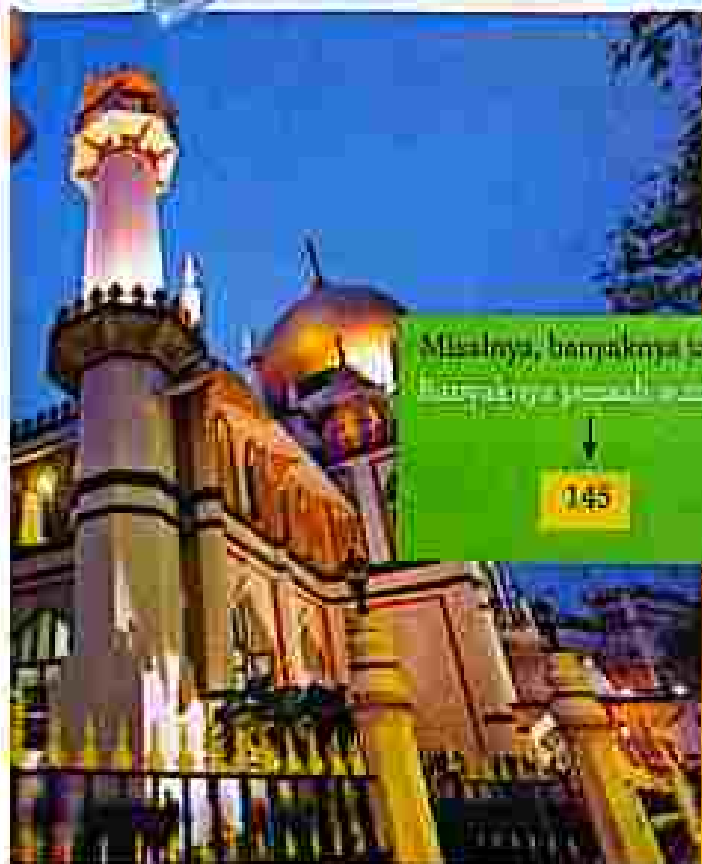
- a. $x - 7 < -2$ b. $x - 6 \geq 3$ c. $-4x - 5 < -5x + 3$ d. $0 \leq x + 7 \leq 4$

Jawab:

- a. $x - 7 < -2$
 $x - 7 + 7 < -2 + 7$ (kedua ruas ditambah 7)
 $x < 5$
- b. $x - 6 \geq 3$
 $x - 6 + 6 \geq 3 + 6$ (kedua ruas ditambah 6)
 $x \geq 9$
- c. $-4x - 5 < -5x + 3$
 $-4x - 5 + 5 < -5x + 3 + 5$ (kedua ruas ditambah 5)
 $-4x < -5x + 8$
 $-4x + 5x < -5x + 5x + 8$ (kedua ruas ditambah $5x$)
 $x < 8$
- d. $0 \leq x + 7 \leq 4$
 $0 - 7 \leq x + 7 - 7 \leq 4 - 7$ (kedua ruas dikurangi 7)
 $-7 \leq x \leq -3$



MATH AROUND US



Sebuah masjid dapat menampung jamaah sebanyak 300 orang. Pada saat salat Dzuhur, masjid itu dipenuhi oleh jamaah. Banyaknya jamaah wanita adalah 145 orang. Dengan menggunakan pertidaksamaan, kita dapat menentukan banyaknya jamaah pria.

Misalnya, banyaknya jamaah pria = x .

Banyaknya jamaah wanita + Banyaknya jamaah pria $\leq$ Kapasitas masjid

145

x

300

Secara matematis, ditulis:

$$145 + x \leq 300$$

$$145 - 145 + x \leq 300 - 145 \text{ (kedua ruas dikurangi 145)}$$

$$x \leq 155$$

Jadi, banyaknya jamaah pria adalah kurang dari atau sama dengan 155 orang.

b. Perkalian dan Pembagian Pertidaksamaan dengan Bilangan

Hasil perkalian suatu pertidaksamaan dengan bilangan tergantung dari bilangan pengali tersebut. Jika pengalinya adalah bilangan yang lebih dari 0 (nol) maka tanda pertidaksamaan tidak berubah. Akan tetapi, jika pengalinya adalah bilangan yang kurang dari 0 (nol) maka tanda pertidaksamaan dibalik. Aturan tersebut berlaku juga untuk pembagian.

Pertidaksamaan	Perkalian	Pembagian
$6 > 5$	$6 \times 3 > 5 \times 3$	$\frac{6}{2} > \frac{5}{2}$
$4 < 10$	$4 \times 5 < 10 \times 5$	$\frac{4}{2} < \frac{10}{2}$
$6 > 5$	$6 \times (-3) < 5 \times (-3)$	$\frac{6}{-2} < \frac{5}{-2}$
$4 < 10$	$4 \times (-5) > 10 \times (-5)$	$\frac{4}{-2} > \frac{10}{-2}$

Secara umum, perkalian dan pembagian pertidaksamaan ditulis sebagai berikut.

- Jika $p < q$ dikali $r > 0$ maka $pr < qr$
- Jika $p < q$ dikali $r < 0$ maka $pr > qr$
- Jika $p < q$ dibagi $r > 0$ maka $\frac{p}{r} < \frac{q}{r}$
- Jika $p < q$ dibagi $r < 0$ maka $\frac{p}{r} > \frac{q}{r}$
- Jika $p > q$ dikali $r > 0$ maka $pr > qr$
- Jika $p > q$ dikali $r < 0$ maka $pr < qr$
- Jika $p > q$ dibagi $r > 0$ maka $\frac{p}{r} > \frac{q}{r}$
- Jika $p > q$ dibagi $r < 0$ maka $\frac{p}{r} < \frac{q}{r}$

INFO MATEMATIKA

www.thatquiz.org

Jenuh belajar matematika? Cokalah buka situs ini. Situs ini berisi berbagai permainan matematika, seperti aritmatika, aljabar, geometri, dan lain-lain. Permainan di situs ini disajikan secara sederhana dan menyenangkan sehingga kamu tidak akan menyadari bahwa sebenarnya kamu sedang belajar. Selain matematika, di sini juga kamu dapat menemukan permainan bahasa dan geografi.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut?

- a. $3x < 5$ b. $4x + 4 \geq 6x - 10$ c. $-1 \leq 2x + 7 \leq 5$

Jawab:

- a. $3x < 5$

$$3x \cdot \frac{1}{3} < 5 \cdot \frac{1}{3} \quad \left(\text{kedua ruas dikali } \frac{1}{3} \text{ dengan } 3 \right)$$

$$x < \frac{5}{3}$$

- b. $4x + 4 \geq 6x - 10$

$$4x + 4 - 4 \geq 6x - 10 - 4 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 4)$$

$$4x \geq 6x - 14$$

$$4x - 6x \geq 6x - 6x - 14 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 6x)$$

$$-2x \geq -14$$

$$-2x \geq -14 \quad \left(\text{kedua ruas dikalikan dengan } -\frac{1}{2} \right)$$

$$x \leq 7 \quad (\text{tanda } \geq \text{ berubah menjadi } \leq)$$

- c. $-1 \leq 2x + 7 \leq 5$

$$-1 - 7 \leq 2x + 7 - 7 \leq 5 - 7 \quad (\text{semua ruas dikurangi } 7)$$

$$-8 \leq 2x \leq -2$$

$$-8 \cdot \frac{1}{2} \leq 2x \cdot \frac{1}{2} \leq -2 \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{semua ruas dikali } \frac{1}{2} \text{ atau dibagi } 2)$$

$$-4 \leq x \leq -1$$



MATH AROUND US

Seorang penjual bakso menjual dagangannya dengan harga Rp2.500,00 per porsi. Jika dalam satu hari pedagang tersebut mendapatkan uang sebanyak Rp112.500,00 maka ia mengalami kerugian. Agar mendapatkan keuntungan, banyaknya porsi yang harus penjual bakso tersebut jual per harinya dapat ditentukan dengan menggunakan pertidaksamaan.

Misalkan, banyaknya porsi bakso per hari = x .

Harga bakso per porsi $\times$ banyak porsi per hari $>$ Rp112.500,00



Rp2.500,00



x

Secara matematis, ditulis:

$$2.500x > 112.500$$

$$\frac{2.500}{2.500} x > \frac{112.500}{2.500} \rightarrow x > 45$$

Jadi, banyaknya porsi bakso dalam satu hari yang harus terjual agar mendapat keuntungan adalah lebih dari 45 porsi.



Endang Ananda Nugroho

ASAHI OTAK

PENGERTIAN DAN SIAT-SIAT PERTIDAKSAMAAN

1. Dapatkah kamu menyatakan setiap pertidaksamaan berikut dengan garis bilangan?

a. $x < 2$

d. $-5 > r$

b. $x < 6$

e. $1 < y$

c. $n \leq -4$

f. $t \geq -3$

2. Carilah penyelesaian setiap pertidaksamaan berikut.

a. $x - 8 > 18$

d. $p - 12 < -12$

b. $w + 1 < 2$

e. $5 + b \geq 1$

c. $-11 \leq w < -1$

f. $u + 10 > 0$

3. Perhatikan setiap pertidaksamaan berikut. Bagaimanakah penyelesaiannya?

a. $\frac{r}{-2} \leq 3$

e. $\frac{4t}{7} \leq -\frac{16}{4}$

b. $-6x \leq 24$

f. $\frac{r}{0,25} \leq -16$

c. $6 < \frac{x}{-2}$

g. $27 \geq -0,9r$

d. $-15 \geq -3q$

h. $-4r > -20$

4. Agar setiap pertidaksamaan berikut bernilai benar, berapakah nilai x dan y ?

a. $x + (-5) > 0$

c. $-12 > x + 8$

b. $7 + y < 2y - 5$

d. $\frac{2}{y} > 0$

5. Diketahui suatu persegi panjang dengan ukuran panjang lebih 3 cm daripada lebarnya. Jika lebarnya x cm dan luasnya paling sedikit 15 cm^2 , bagaimanakah sistem pertidaksamaan yang harus dipenuhi oleh x ?

B. Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan yang memuat variabel dengan pangkat tertinggi dari variabel tersebut adalah 1. Untuk lebih jelasnya, berikut disajikan beberapa contoh pertidaksamaan linear.

- a. $2x > 10$ c. $x + 3 > 5$ e. $2x + 3 \leq -21$
b. $-2x + 5 < 7$ d. $3 - 5x \geq -7$ f. $x + 4 \geq 4$

Dari beberapa contoh di atas, terlihat bahwa pertidaksamaan linear tersebut bisa bernilai salah ataupun bernilai benar bergantung dari nilai x . Jika x diganti dengan suatu bilangan riil dan mengakibatkan pertidaksamaan tersebut menjadi bernilai benar maka x tersebut dinamakan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut.

Untuk menentukan penyelesaian tersebut, ada beberapa cara yang bisa ditempuh, yaitu:

1. Menambah atau mengurangi dengan bilangan yang sama untuk kedua ruasnya.
2. Mengalikan dengan bilangan positif atau negatif untuk kedua ruasnya.

Kedua cara tersebut sebenarnya telah kita bahas pada sifat-sifat pertidaksamaan. Akan tetapi, untuk dapat memahami lebih mendalam, perhatikanlah beberapa contoh berikut.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan penyelesaian dan tunjukkan dengan garis bilangan setiap pertidaksamaan berikut.

- a. $x - 3 > 2$
b. $3x + 2 \leq 2x + 6$

Jawab:

- a. $x - 3 > 2$
 $x - 3 + 3 > 2 + 3$ (kedua ruas ditambah 3)
 $x > 5$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x > 5$.

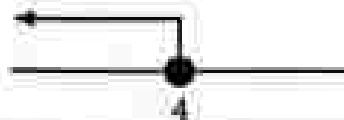
Jika $x > 5$ ditunjukkan dengan garis bilangan, hasilnya adalah sebagai berikut.



- b. $3x + 2 \leq 2x + 6$
 $3x + 2 - 2x - 2 \leq 2x + 6 - 2x - 2$ (kedua ruas ditambah $-2x - 2$ agar ruas kanan tidak memiliki variabel lagi)
 $x \leq 4$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x \leq 4$.

Jika $x \leq 4$ ditunjukkan dengan garis bilangan, hasilnya adalah sebagai berikut.



TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan penyelesaian dan tunjukkan dengan garis bilangan setiap pertidaksamaan berikut.

a. $-4x > 12$

b. $3(4 - 2x) < 3x - 6$

Jawab:

a. $-4x > 12$

$$-4x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) > 12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \quad \left(\text{kedua ruas dikali } -\frac{1}{4}\right)$$

$$x < -3$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x < -3$.

Jika $x < -3$ ditunjukkan dengan garis bilangan, hasilnya adalah sebagai berikut.



b. $3(4 - 2x) < 3x - 6$

$$12 - 6x < 3x - 6$$

$$12 - 6x - 12 + 3x < 3x - 6 - 12 + 3x \quad (\text{kedua ruas ditambah } -12 + 3x \text{ agar ruas kanan tidak memiliki variabel lagi})$$

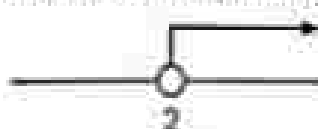
$$-9x < -18$$

$$(\text{kedua ruas dibagi } -9)$$

$$x > 2$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $x > 2$.

Jika $x > 2$ ditunjukkan dengan garis bilangan, hasilnya adalah sebagai berikut.



AMAZING PERSON

AL-BIRUNI (973 - 1048 M)

Matematikawan Serba Bisa



Sumber: www.bm.org.id

Nama lengkap Al-Biruni adalah **Abu Rayhan Muhammed Ibnu Ahmad Al-Biruni**. Selain menguasai matematika, beliau juga menguasai fisika, antropologi, psikologi, kimia, astrologi, sejarah, geografi, geodesi, farmasi, kedokteran, dan filsafat. Beliau memberikan sumbangan yang signifikan bagi pengembangan matematika, khususnya dalam bidang teori dan praktik aritmatika, bilangan rasional, teori rasio, geometri, dan lainnya.

Sumber: www.gauldim.com

TANYA & JAWAB

Tanya:

Carilah penyelesaian setiap pertidaksamaan berikut.

a. $\frac{x}{3} - 1 < 3 + \frac{x}{2}$

b. $\frac{1}{3}(t+2) \geq \frac{1}{4}(t-1)$

Jawab:

a. $\frac{x}{3} - 1 < 3 + \frac{x}{2}$

(kedua ruas dikali 6, KPK dari 3 dan 2)

$$2x - 6 < 18 + 3x$$

$$2x - 6 - 3x + 6 < 18 + 3x - 3x + 6 \quad (\text{kedua ruas ditambah } -3x + 6 \text{ agar ruas kanan tidak mempunyai variabel lagi})$$

$$-x < 24 \quad (\text{kedua ruas dikali dengan } -1)$$

$$x > 24$$

b. $\frac{1}{3}(t+2) \geq \frac{1}{4}(t-1)$

(kedua ruas dikali 12, KPK dari 3 dan 4)

$$4t + 8 < 3t - 3$$

$$4t + 8 - 3t - 8 < 3t - 3 - 3t - 8 \quad (\text{kedua ruas ditambah } -3t - 8 \text{ agar ruas kanan tidak mempunyai variabel lagi})$$

$$t < -11$$

Tanya:

Tentukan penyelesaian setiap persamaan berikut.

a. $\frac{x+2}{2} \leq \frac{x+3}{5}$

b. $\frac{4p+2}{3} + \frac{2p+1}{2} < \frac{p+3}{4}$

Jawab:

a. $\frac{x+2}{2} \leq \frac{x+3}{5}$

(kedua ruas dikali 10, KPK dari 2 dan 5)

$$5x + 10 \leq 2x + 6$$

$$5x + 10 - 2x - 10 \leq 2x + 6 - 2x - 10 \quad (\text{kedua ruas ditambah } -2x - 10 \text{ agar ruas kanan tidak mempunyai variabel lagi})$$

$$3x \leq -4$$

$$x \leq \frac{-4}{3}$$

$$x \leq 8$$

b. $\frac{4p+2}{3} + \frac{2p+1}{2} < \frac{p+3}{4}$

(kedua ruas dikali 12, KPK dari 3, 2 dan 4)

$$16p + 8 + 12p + 6 < 3p + 9$$

$$28p + 14 - 3p - 14 < 3p + 9 - 3p - 14 \quad (\text{kedua ruas ditambah } -3p - 14 \text{ agar ruas kanan tidak mempunyai variabel lagi})$$

$$25p < -5 \quad \left(\text{kedua ruas dikali dengan } \frac{1}{25} \right)$$

$$p < -\frac{1}{5}$$

LET'S DO IT



Perhatikan uraian berikut.

Misal $x = 2$ dan $y = 4$ maka $2 < 4$ sehingga

$$\begin{aligned} x &< y && \text{(kedua ruas kalikan dengan } x\text{)} \\ x^2 &< xy && \text{(kedua ruas dikurangi } y^2\text{)} \\ x^2 - y^2 &< xy - y^2 && \text{(difaktorkan)} \\ (x + y)(x - y) &< y(x - y) && \text{(bagi kedua ruas dengan } (x - y)\text{)} \\ x + y &< y && \text{(di mana } x = 2 \text{ dan } y = 4\text{)} \\ 2 + 4 &< 4 \\ 6 &< 4 \end{aligned}$$

Apakah benar $6 < 4$?

Dapatkan kamu mencari letak kesalahan uraian di atas?

ASAHI OTAK PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan linear berikut.

1. $3x - 5 > 7$
2. $3x - 6 \geq x - 6$
3. $2(x - 1) \geq 3(x - 1)$
4. $3x - \frac{1}{3} < 2x - 1$
5. $-2(x + 3) > 5$
6. $x - 2 < \frac{x - 4}{3}$
7. $\frac{5 - x}{2} + \frac{x + 4}{3} \geq \frac{4x - 6}{5}$
8. $cx - 2d > dx + 2d$
9. $4\frac{4}{5}(2x - 1) \leq \frac{1}{2}(3x - 2)$
10. $\frac{x - 5}{3} + \frac{x - 4}{6} \geq 5$

C. Pertidaksamaan Kuadrat

1. Bentuk Umum Pertidaksamaan Kuadrat

Sebelumnya, kita telah mempelajari bentuk umum persamaan kuadrat yang dinyatakan dengan $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a, b , dan $c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Pertidaksamaan kuadrat memiliki bentuk umum yang sama dengan persamaan kuadrat dengan mengganti tanda hubung.

Secara umum, pertidaksamaan kuadrat ditulis

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ atau } ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ atau } ax^2 + bx + c \geq 0$$

2. Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat

Nilai x yang memenuhi suatu pertidaksamaan kuadrat disebut penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat tersebut. Penyelesaian suatu pertidaksamaan kuadrat dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- Menentukan nilai x (variabel) dengan mengubah pertidaksamaan kuadrat menjadi persamaan kuadrat.
- Menbuat garis bilangan dengan x (variabel) yang diperoleh pada langkah 1 dijadikan batas interval sehingga garis bilangan tersebut terbagi menjadi beberapa bagian.
- Tetapkan tanda positif (+) atau negatif (-) dengan menyubstitusikan x yang diambil secara sembarang pada setiap bagian ke persamaan $ax^2 + bx + c$.
- Menetapkan bagian yang menjadi penyelesaian, yaitu bagian yang bertanda:
(+) sebagai penyelesaian $ax^2 + bx + c > 0$ atau $ax^2 + bx + c \geq 0$
(-) sebagai penyelesaian $ax^2 + bx + c < 0$ atau $ax^2 + bx + c \leq 0$



AL-HAYTHAM 1000 - 1100

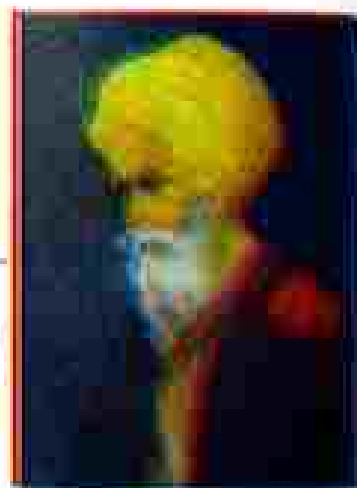
Ilmu Optik Modern

Abu Ali al-Hasan Ibnu al-Hasan Ibnu al-Haytham adalah nama lengkap Al-Haytham. Ia mengenyam pendidikan pertamanya di masjid-masjid Ba'rah dan Bagdad. Di sana, ia belajar teknologi dan sains. Sebagai Muslim yang taat, ia menghabiskan sebagian besar hidupnya untuk mengenal dan melayani Sang Khalik. Namun, ia menemukan dalam diri Aristoteles jalinan semangat dan persamaan dalam hal intelektualitasnya.

Abu Ali, demikian nama panggilan masa mudanya, sudah terkenal karena minat dan pengetahuannya pada ilmu pengetahuan, khususnya matematika dan fisika. Minatnya itu yang membawanya ke Spanyol. Di Spanyol, ia melakukan riset dalam bidang optik, matematika, fisika, pengobatan, dan mengembangkan metode ilmiah.

Bapak Optik Modern ini telah menulis lebih dari 200 buku dengan subjek-subjek yang lebih luas. Dialah orang pertama yang mengaplikasikan ilmu aljabar ke dalam ilmu geometri dan menemukan cabang matematika yang disebut geometri analitik.

Sumber: id.wikipedia.org



Sumber: id.wikipedia.org

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah cara menentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 2x - 8 > 0$?

Jawab:

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

Langkah 1:

Ubah ke persamaan kuadrat dan tentukan akar-akarnya.

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = 4 \text{ atau } x = -2$$

Langkah 2:

Buat garis bilangan dengan batas akar-akar persamaan kuadrat pada **Langkah 1**.



Langkah 3:

Menentukan tanda (+ atau -) pada setiap daerah.

Ambil x sembarang pada bagian I, misalnya $x = -5$.

$$(-5)^2 - 2(-5) - 8 = 27 \rightarrow \text{positif (+)}$$

Ambil x sembarang pada bagian II, misalnya $x = 0$.

$$(0)^2 - 2(0) - 8 = -8 \rightarrow \text{negatif (-)}$$

Ambil x sembarang pada bagian III, misalnya $x = 5$.

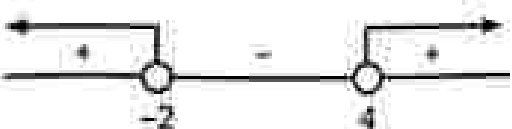
$$(5)^2 - 2(5) - 8 = 7 \rightarrow \text{positif (+)}$$

Jadi, tanda pada setiap daerahnya dapat digambarkan sebagai berikut.



Langkah 4:

Oleh karena pertidaksamaannya adalah $x^2 - 2x - 8 > 0$ maka daerah penyelesaiannya adalah daerah positif (yang bertanda +).



Jadi, Hp = $\{x \mid x < -2 \text{ atau } x > 4, x \in R\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x^2 + 5x + 1 \leq x + 7$.

Jawab:

$$2x^2 + 5x + 1 \leq x + 7$$

$$2x^2 + 4x - 6 \leq 0 \quad (\text{jadikan ruas kanan nol})$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \quad (\text{sederhanakan (kedua ruas dibagi dengan 2)})$$

Langkah 1: Ubah ke persamaan kuadrat dan tentukan akar-akarnya.

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = -3$$

Langkah 2: Buat garis bilangan dengan batas akar persamaan kuadrat pada Langkah 1.



Langkah 3: Menentukan tanda (+ atau -) pada setiap daerah.

Ambil x sembarang pada bagian I, misalnya $x = -5 \rightarrow (-5)^2 + 2(-5) - 3 = 12 \rightarrow$ positif (+)

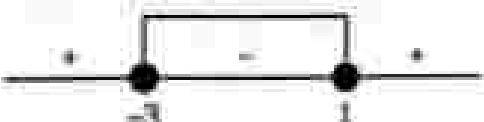
Ambil x sembarang pada bagian II, misalnya $x = 0 \rightarrow (0)^2 + 2(0) - 3 = -3 \rightarrow$ negatif (-)

Ambil x sembarang pada bagian III, misalnya $x = 2 \rightarrow (2)^2 + 2(2) - 3 = 5 \rightarrow$ positif (+)



Langkah 4:

Oleh karena pertidaksamaannya adalah $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ maka daerah penyelesaiannya adalah daerah yang negatif (bertanda -).



Jadi, $H_p = \{x \mid -3 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$.

Tanya:

Tentukan batas-batas nilai x agar grafik $y = x^2 + 2x + 1$ selalu berada di bawah grafik $y = 2x^2 + 4x - 34$.

Jawab:

Oleh karena grafik $y = x^2 + 2x + 1$ selalu berada di bawah grafik $y = 2x^2 + 4x - 34$ maka

$$x^2 + 2x + 1 < 2x^2 + 4x - 34$$

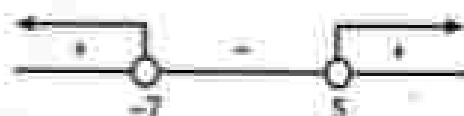
$$-x^2 - 2x + 35 < 0$$

$$x^2 + 2x - 35 > 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$(x - 5)(x + 7) = 0$$

$$x = 5 \text{ atau } x = -7$$



Jadi, batas-batas nilai x adalah $x < -7$ atau $x > 5$.

3. Penggunaan Diskriminan

Terkadang, ketika pertidaksamaan kuadrat yang telah diubah menjadi persamaan kuadrat, kemudian difaktorkan, persamaan kuadrat tersebut tidak mempunyai akar riil. Untuk menentukan penyelesaian yang seperti ini, carilah diskriminannya terlebih dahulu.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - 2x + 8 > 0$?

Jawab:

$$x^2 - 2x + 8 > 0$$

$$x^2 - 2x + 8 = 0$$

(jadikan persamaan kuadrat terlebih dulu)

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(8) = -28 < 0 \quad (D < 0, \text{akar-akarnya tidak riil})$$

Oleh karena $D < 0$ dan $a = 1 > 0$ maka $x^2 - 2x + 8$ adalah definit positif sehingga semua nilai x yang disubstitusikan ke $x^2 - 2x + 8$ akan menghasilkan bilangan positif.

Jadi, $Hp = \{x \mid x \in R\}$.

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian dari $3x^2 - 5x + 3 < 0$?

Jawab:

$$3x^2 - 5x + 3 < 0$$

$$3x^2 - 5x + 3 = 0$$

(jadikan persamaan kuadrat terlebih dulu)

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(3) = -11 < 0 \quad (D < 0, \text{akar-akarnya tidak riil})$$

Oleh karena $D < 0$ dan $a = 3 > 0$ maka $3x^2 - 5x + 3$ adalah definit positif sehingga semua nilai x yang disubstitusikan ke $3x^2 - 5x + 3$ akan menghasilkan bilangan positif.

Jadi, $Hp = \{x \mid x \in R\}$.

Tanya:

Berapakah nilai m agar persamaan kuadrat $x^2 - (m+1)x + 2m - 1 = 0$ mempunyai dua akar real yang berbeda?

Jawab:

$$x^2 - (m+1)x + 2m - 1 = 0; a = 1, b = -(m+1), c = 2m - 1$$

$$\text{Syarat: } D = b^2 - 4ac > 0$$

$$[-(m+1)]^2 - 4(1)(2m-1) > 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 > 0$$

$$m^2 - 6m + 5 > 0$$

(pertidaksamaan kuadrat dalam m)

$$m^2 - 6m + 5 = 0$$

(jadikan persamaan kuadrat terlebih dulu)

$$(m-5)(m-1) = 0$$

$$m = 5 \text{ atau } m = 1$$



Jadi, $m < 1$ atau $m > 5$.

ASAHI OTAK

PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

1. Berapakah nilai x yang memenuhi setiap pertidaksamaan linear berikut?

a. $(x+1)^2 < 9$

b. $(3+7x)^2 \geq 65$

c. $x^2 - 6x - 16 \geq 0$

d. $2x - 3x^2 - 4 \leq 0$

e. $2x^2 - x - 3\frac{1}{2} \leq 0$

f. $x^2 + x - 2 > 0$

g. $(2x+1)^2 + 2 > x(2x-1)$

h. $6x^2 + x - 2 < 0$

2. Jika $y = 2x + 1$, berapakah nilai y untuk x yang memenuhi $x^2 - 6x - 16 < 0$?

3. Berapakah nilai m agar persamaan kuadrat $mx^2 + 2(m+1)x + m+3 = 0$ mempunyai akar yang tidak riil?

4. Bagaimanakah menyatakan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $(x-2)(3-x) \geq 4(x-2)$ dengan menggunakan garis bilangan?

5. Berapakah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $(2x-2)^2 < (5-x)^2, x \in \mathbb{R}$?

D. Pertidaksamaan Bentuk Pecahan

1. Bentuk Umum

Untuk memahami bentuk umum pertidaksamaan bentuk pecahan, perhatikan beberapa contoh pertidaksamaan bentuk pecahan berikut.

a. $\frac{3x+2}{2x-4} \geq 0$

b. $\frac{x+2}{x^2-3x-4} < 0$

c. $\frac{x^2-x-12}{x^2-9} > 0$

d. $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} \leq 0$

Secara umum, pertidaksamaan bentuk pecahan ditulis

$$(i) \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

$$(iii) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

$$(ii) \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

$$(iv) \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

dengan syarat $g(x) \neq 0$

2. Penyelesaian Pertidaksamaan Bentuk Pecahan

Nilai x yang memenuhi suatu pertidaksamaan bentuk pecahan disebut dengan penyelesaian pertidaksamaan bentuk pecahan tersebut. Penyelesaian suatu pertidaksamaan bentuk pecahan dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- Mengubah pertidaksamaan sehingga pertidaksamaannya hanya berada di satu ruas, yaitu ruas kiri dan ruas kanannya sama dengan 0.
- Menyamakan penyebut bentuk pecahan dan mengubah ke dalam persamaan untuk menentukan x (variabel) pembuat 0 dengan syarat penyebut $\neq 0$.
- Membuat garis bilangan dengan x (variabel) yang diperoleh pada langkah 2 dijadikan batas interval sehingga garis bilangan tersebut terbagi menjadi beberapa bagian.
- Tetapkan tanda positif (+) atau negatif (-) dengan menyubstitusikan x yang diambil secara sembarang pada setiap bagian ke persamaan yang diperoleh pada langkah 3.
- Menetapkan bagian yang menjadi penyelesaian, yaitu bagian bertanda:
(+) sebagai penyelesaian persamaan bertanda lebih dari atau sama dengan 0
(-) sebagai penyelesaian persamaan bertanda kurang dari atau sama dengan 0

Tanya:

Dapatkan kamu menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{x-4}{x+5} < 0$

Jawab:

Langkah 1:

Tidak diperlukan karena pertidaksamaan sudah di satu ruas.

Langkah 2:

$$\frac{x-4}{x+5} < 0$$

Pecahan akan bernilai 0 jika pembilang = 0 dan penyebut = 0.

(i) $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

(ii) $x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$

Langkah 3:



Langkah 4:

Ambil x sembarang pada bagian I, misalnya $x = -6$.

$$\frac{-6-4}{-6+5} = 10 \rightarrow \text{positif (+)}$$

Ambil x sembarang pada bagian II, misalnya $x = 0$.

$$\frac{0-4}{0+5} = -\frac{4}{5} \rightarrow \text{negatif (-)}$$

Ambil x sembarang pada bagian III, misalnya $x = 5$.

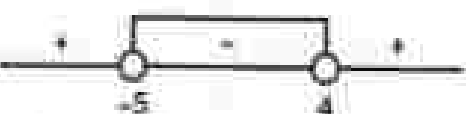
$$\frac{5-4}{5+5} = \frac{1}{10} \rightarrow \text{positif (+)}$$

Jadi, tanda pada setiap daerahnya dapat digambarkan sebagai berikut.



Langkah 5:

Oleh karena pertidaksamaannya adalah $\frac{x-4}{x+5} < 0$ maka daerah penyelesaiannya adalah daerah negatif (yang bertanda -).



Jadi Hp = $\{x \mid -5 < x < 4, x \in R\}$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian dari $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \geq x + 2$?

Jawab:

Langkah 1:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \geq x + 2 \rightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} - (x + 2) \geq 0$$

Langkah 2:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} - \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} - \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - x^2 - x + 2}{x - 1} \geq 0 \rightarrow \frac{-6x + 8}{x - 1} \geq 0 \rightarrow \frac{-6x + 8}{x - 1} = 0$$

Pecahan akan bernilai 0 jika pembilang = 0 dan penyebut = 0.

$$(i) -6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$(ii) x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Langkah 3:



Langkah 4:

Ambil x sembarang pada bagian I, misalnya $x = 0 \rightarrow \frac{-6(0) + 8}{0 - 1} = -8 \rightarrow$ negatif (-)

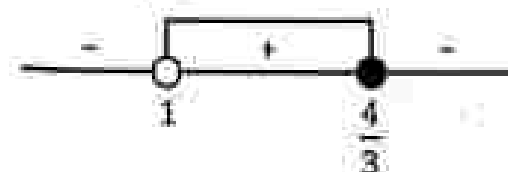
Ambil x sembarang pada bagian II, misalnya $x = \frac{7}{6} \rightarrow \frac{-6\left(\frac{7}{6}\right) + 8}{\frac{7}{6} - 1} = 6 \rightarrow$ positif (+)

Ambil x sembarang pada bagian III, misalnya $x = 2 \rightarrow \frac{-6(2) + 8}{2 - 1} = -4 \rightarrow$ negatif (-)



Langkah 5:

Oleh karena pertidaksamaannya adalah $\frac{-6x + 8}{x - 1} \geq 0$ maka daerah penyelesaiannya adalah daerah positif (yang bertanda +).



$$\text{Jadi, Hp} = \{x \mid 1 < x \leq \frac{4}{3}, x \in R\}.$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimanakah cara menentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{2x^2-1}{x-3} > x+3 + \frac{17}{x-3}$?

Jawab:

Langkah 1:

$$\frac{2x^2-1}{x-3} > x+3 + \frac{17}{x-3} \rightarrow \frac{2x^2-1}{x-3} > \frac{x^2-9}{x-3} + \frac{17}{x-3} \rightarrow \frac{2x^2-1}{x-3} > \frac{x^2+8}{x-3}$$

Langkah 2:

$$\frac{2x^2-1}{x-3} - \frac{x^2+8}{x-3} > 0 \rightarrow \frac{2x^2-1-x^2-8}{x-3} > 0 \rightarrow \frac{2x^2-1-x^2-8}{x-3} > 0$$

$$\frac{x^2-9}{x-3} = 0$$

Pecahan akan bernilai 0 jika pembilang = 0 dan penyebut $\neq 0$.

i. $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = 3$ atau $x = -3$

ii. $x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

Langkah 3:

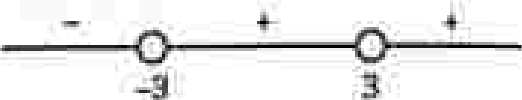


Langkah 4:

Ambil x sembarang pada bagian I, misalnya $x = -4 \rightarrow \frac{(-4)^2-9}{-4-3} = -1 \rightarrow$ negatif (-)

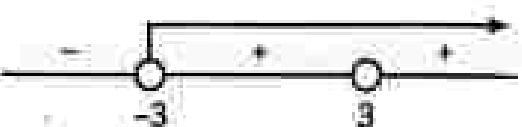
Ambil x sembarang pada bagian II, misalnya $x = 0 \rightarrow \frac{0^2-9}{0-3} = 3 \rightarrow$ positif (+)

Ambil x sembarang pada bagian III, misalnya $x = 5 \rightarrow \frac{4^2-9}{4-3} = 7 \rightarrow$ positif (+)



Langkah 5:

Oleh karena pertidaksamaannya adalah $\frac{x^2-9}{x-3} > 0$ maka daerah penyelesaiannya adalah daerah negatif (yang bertanda -).



Jadi, Hp = $\{x \mid x < -3, x \neq 3, x \in R\}$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah himpunan penyelesaian dari $\frac{21x^2 - 25x - 4}{x^2 - 9} \leq 0$?

Jawab:

Langkah 1: Tidak diperhatikan karena pertidaksamaan sudah di satu ruas.

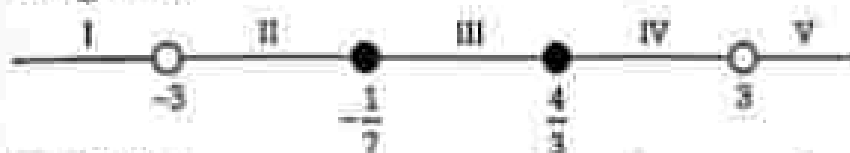
Langkah 2:

$$\frac{21x^2 - 25x - 4}{x^2 - 9} = 0 \rightarrow \text{pecahan akan } = 0 \text{ jika pembilang } = 0 \text{ dan penyebut } \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{i. } 21x^2 - 25x - 4 &= 0 \\ (7x + 1)(3x - 4) &= 0 \\ x &= -\frac{1}{7} \text{ atau } x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } x^2 - 9 &= 0 \\ (x + 3)(x - 3) &= 0 \\ x &= -3 \text{ atau } x = 3 \end{aligned}$$

Langkah 3:



Langkah 4:

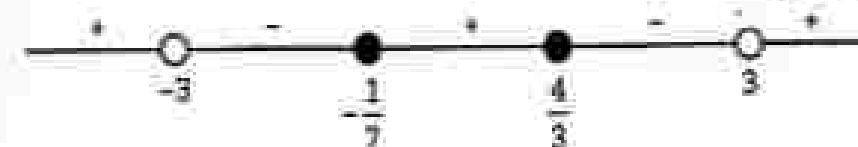
Ambil x sembarang pada bagian I, misalnya $x = -4 \rightarrow \frac{21(-4)^2 - 25(-4) - 4}{(-4)^2 - 9} = 62 \rightarrow \text{positif (+)}$

Ambil x sembarang pada bagian II, misalnya $x = -1 \rightarrow \frac{21(-1)^2 - 25(-1) - 4}{(-1)^2 - 9} = -5,25 \rightarrow \text{negatif (-)}$

Ambil x sembarang pada bagian III, misalnya $x = 0 \rightarrow \frac{21(0)^2 - 25(0) - 4}{(0)^2 - 9} = \frac{4}{9} \rightarrow \text{positif (+)}$

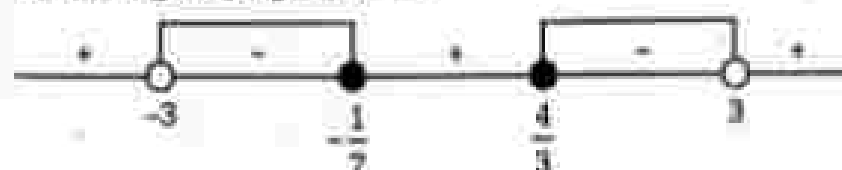
Ambil x sembarang pada bagian IV, misalnya $x = 2 \rightarrow \frac{21(2)^2 - 25(2) - 4}{(2)^2 - 9} = -6 \rightarrow \text{negatif (-)}$

Ambil x sembarang pada bagian V, misalnya $x = 4 \rightarrow \frac{21(4)^2 - 25(4) - 4}{(4)^2 - 9} = 33 \rightarrow \text{positif (+)}$



Langkah 5:

Oleh karena pertidaksamaannya adalah $\frac{21x^2 - 25x - 4}{x^2 - 9} \leq 0$ maka daerah penyelesaiannya adalah daerah negatif (yang bertanda -).



$$\text{Jadi, Hp} = \left\{ x \mid -3 < x \leq -\frac{1}{7} \text{ atau } \frac{4}{3} \leq x < 3, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

ASAHI OTAK

PERTIDAKSAMAAN BENTUK PECAHAN

1. Berapakah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan bentuk pecahan berikut?

a. $\frac{x-3}{x+1} < 0$

g. $\frac{2x+1}{x-2} < 2$

b. $\frac{3-6x}{x+2} > 0$

h. $\frac{2x-4}{x^2+2} \leq 0$

c. $\frac{6}{x-1} \leq \frac{3x}{x-2}$

i. $\frac{x^2-3x+2}{2x+4} > 0$

d. $\frac{3}{1-2x} \leq \frac{x}{1-2x}$

j. $\frac{x^2-2x-8}{-x^2+2x-2} \geq 0$

e. $\frac{x-3}{x+1} < 0$

k. $\frac{3}{x-1} > \frac{2}{x-2}$

f. $\frac{1}{x-2} \geq 1$

l. $\frac{5}{x-7} < \frac{7}{x-5}$

2. Berapakah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{x-3}{x^2-8x+7} > 0$?

3. Agar pecahan $\frac{x^2+3x-10}{x^2-x+2}$ bernilai positif, berapakah nilai x yang memenuhi pecahan tersebut?

4. Berapakah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{3x^2+2x-1}{3x-2} > 0$?

5. Berapakah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{x^2+x-12}{2x^2+9x+4}$?



LET'S ACT

Dalam kehidupan sehari-hari, sebenarnya kamu sering dihadapkan suatu permasalahan yang secara tidak sadar berhubungan dengan bentuk pangkat, akar, dan logaritma. Berikut disajikan beberapa permasalahan yang berkaitan dengan pokok bahasan yang telah kamu pelajari. Kerjakanlah bersama kelompok belajarmu.

Petunjuk:

1. Buatlah 3 kelompok yang terdiri atas 3-4 orang.
2. Setiap anggota kelompok menyelesaikan setiap permasalahan berikut (± 20 menit).
3. Diskusikan penyelesaian yang diperoleh setiap anggota kelompok (± 20 menit).
4. Setiap kelompok mempresentasikan penyelesaian satu permasalahan, misalnya kelompok 1 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 1, kelompok 2 mempresentasikan penyelesaian permasalahan 2, dan seterusnya. Jika kelompok lain memiliki langkah penyelesaian yang berbeda untuk permasalahan yang sama maka kelompok tersebut juga mempresentasikan penyelesaiannya tersebut (± 40 menit).



Sumber: www.kemendiknas.go.id

Permasalahan 1:

Sebuah kolam renang dibuat berbentuk persegi panjang dengan kelilingnya 50 m. Jika luas kolam tersebut paling sedikit 136 m^2 , tentukan ukuran panjang kolam renang yang memenuhi syarat tersebut.

Permasalahan 2:

Pak Ali ingin membeli TV berwarna 14 inch dengan harga Rp850.000,00. Jika penghapilan Pak Ali sebesar Rp170.000,00 per minggu, dalam berapa minggu Pak Ali dapat membeli TV?



Sumber: jay.alitok.com



Sumber: pixabay.com

Permasalahan 3:

Suatu perusahaan memproduksi dan menjual lampu. Untuk suatu model tertentu, departemen riset, pemasaran, dan keuangan menginformasikan bahwa biaya pembuatan (C) F unit lampu, dinyatakan dengan persamaan $C = 240.000 + 200F$. Adapun persamaan pendapatan dinyatakan dengan persamaan $R = 800F - F^2$ (persamaan pendapatan). Tentukan harga satuan lampu agar perusahaan mendapat keuntungan.

1. Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda "<" (kurang dari); ">" (lebih dari); "≤" (kurang dari atau sama dengan) dan "≥" (lebih dari atau sama dengan).
2. Sifat-Sifat Pertidaksamaan
 - Jika $p < q$ maka $p + r < q + r$
 - Jika $p < q$ maka $p - r < q - r$
 - Jika $p > q$ maka $p + r > q + r$
 - Jika $p > q$ maka $p - r > q - r$
 - Jika $p < q$ dikali dengan $r > 0 \rightarrow pr < qr$ dan $\frac{p}{r} < \frac{q}{r}$
 - Jika $p > q$ dikali dengan $r > 0 \rightarrow pr > qr$ dan $\frac{p}{r} > \frac{q}{r}$
 - Jika $p < q$ dikali dengan $r < 0 \rightarrow pr > qr$ dan $\frac{p}{r} > \frac{q}{r}$
 - Jika $p > q$ dikali dengan $r < 0 \rightarrow pr < qr$ dan $\frac{p}{r} < \frac{q}{r}$
3. Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan yang memuat variabel dengan pangkat tertinggi dari variabel tersebut adalah satu.
4. Pertidaksamaan kuadrat memiliki bentuk umum:
 - $ax^2 + bx + c < 0$ atau $ax^2 + bx + c > 0$
 - $ax^2 + bx + c \leq 0$ atau $ax^2 + bx + c \geq 0$
5. Pertidaksamaan bentuk pecahan memiliki bentuk umum:
 - $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ atau $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$
 - $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ atau $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$
 dengan syarat $g(x) \neq 0$

Mukadimah

Hal yang paling istimewa dari manusia dibandingkan dengan makhluk ciptaan Allah lainnya adalah anugerah akal. Itulah, menurut para ulama, "amanat" yang menjadi pembeda paling utama antara manusia dengan makhluk lainnya. Bahkan dinyatakan oleh Allah SWT, sebagaimana yang terdapat di dalam Alquran surat Al-Ahzab ayat 72, "Sesungguhnya Kami telah mengemukakan amanat kepada langit, Bumi, dan gunung-gunung. Akan tetapi, semuanya enggan untuk memikul amanat itu, lantaran mereka khawatir akan mengkhianatinya. Dan dipikullah amanat tersebut oleh manusia. Sesungguhnya manusia itu amat zalim dan amat bodoh [*Inna 'aradhu al-amanah 'ala as-samawaat wa al-ardh wa al-jibal, fa abayna an yahmilnaha wa asyafana minha. Wa hamalaha al-insan. Innahu kana dzaluuma jahuula.*]"

Di samping keterangan di atas, dalam al-Isra ayat 70, Allah telah menyebutkan dengan lebih gamblang bahwa, "Dan sungguh telah Kami muliakan manusia". Karenanya, betapa sangat matangnya persiapan yang dilakukan oleh Allah dalam upaya meninggikan derajat kemanusiaan kita. Sampai-sampai Allah memuji manusia sebagai karya-Nya yang paling sempurna, "Sungguh telah kami ciptakan manusia dalam sebaik-baiknya rupa, lahir dan batin. Lantas kami kembalikan mereka ke posisi yang paling rendah." [*laqad khalaqna al-insana fi ahsani taqwim. tsumma radadnahu asfala safilin*] [QS al-Tin: 4-5].

Dengan begitu, dengan bekal anugerah "amanat" tersebut, manusia akan bisa mendapatkan posisi yang jauh lebih tinggi dari makhluk manapun, bahkan dari para malaikat. Akan tetapi, dalam kenyataannya, tidak semua manusia bisa tepat menggunakannya.

Hal ini terjadi bukan semata lantaran kebodohan mereka, namun yang paling menentukan adalah ketidakbisaan mereka dalam memanfaatkannya. Mereka diberi bekal, namun tidak dimakannya. Mereka diberi amanat, namun tidak ditunaikannya. Mereka diberi senjata, namun tidak digunakannya. Hal ini sebagaimana yang tercatat di dalam Alquran surat al-A'raf ayat 179 berikut ini, "Dan niscaya akan Kami lemparkan ke dalam api neraka, kebanyakan jin dan manusia, dimana mereka mempunyai hati, namun tidak dipergunakan untuk bisa memahami. Mereka mempunyai mata, namun tidak dipergunakan untuk melihat [kebenaran]. Mereka mempunyai telinga, namun tidak dipergunakan untuk mendengarkan. Mereka itu bagaikan binatang ternak, bahkan lebih sesat.

Dengan demikian, akal sebagai amanat Ilahiah merupakan tali kendali bagi manusia dalam rangka menghadapi godaan syahwat nafsu. Dan tidak ada pertentangan antara akal dengan wahyu Allah, yaitu Alquran. Sebab keduanya sama-sama berasal dari Allah, yang satu sama lain saling menguatkan dan melengkapi. Bahkan tidak sedikit ayat-ayat Alquran dan Hadis Nabi yang menganjurkan kita untuk memanfaatkan dengan maksimal adanya anugerah akal ini. Misalnya, anjuran agar kita bertafakur dan mengingat-ingat, seperti yang termuat dalam QS. al-Baqarah: 221; QS. Ibrahim: 25; QS. al-Qashash: 43, 46, dan 51; QS. al-An'am: 126; QS. al-A'raf: 26 dan 130, dsb. Anjuran agar kita berfikir, sebagaimana yang termuat dalam QS. al-A'raf: 176; QS. an-Nahl: 11, 44, dan 69; QS. al-Hasyr: 21; QS. ar-Rum: 8; dsb. Juga anjuran agar kita secara langsung memahami dan menyadari anugerah akal, sebagaimana yang terdapat dalam QS. al-Baqarah: 44 dan 76; QS. Ali Imran: 65; QS. al-An'am: 32; QS. al-A'raf: 169; QS. Yusuf: 109; QS. al-Mukminun: 80; dsb.

Semua ayat tersebut mengacu kepada satu titik, yaitu keharusan dan keniscayaan kita menggunakan akal dalam kehidupan, bahkan juga dalam memahami ajaran agama kita, sebagaimana sebuah keterangan yang dinisbatkan kepada Nabi, bahwa "Agama adalah akal. Tidak ada nilai manfaat beragama bagi orang yang tidak dapat memanfaatkan akalnya [*ad-Din 'aql. La din li man la aqla lah*]

Dengan demikian, pada titik ini akal memainkan peranan yang signifikan dalam rangka melengkapi dan menjadikan sempurna pemahaman ajaran agama yang telah diwahyukan oleh Allah kepada an P nu up nab *The seal of prophets* Muhammad Saw. Karenanya, tidaklah tepat, seandainya kita berpikiran adanya perbedaan dan bahkan pertentangan antara akal dengan wahyu. Sebab hal tersebut justru hanya akan menghabiskan energi kita semata, yang senyatanya memang tidak ada polemik dan pertentangan di antara keduanya.

Semoga kita dapat mengharmoniskan keduanya dan memaksimalkan peranan dari masing-masingnya secara tepat. Sebab di situlah makna terdalam dari keberhasilan seseorang dalam menunaikan amanat yang paling utama dan paling mendasar.

Wallahu A'lam bi ash-Shawwab



5



BERMAIN DENGAN LOGIKA MATEMATIKA

Manfaat:

Mempelajari bab ini akan meningkatkan kemampuan berpikir secara rasional, kritis, metodis, cermat, dan objektif. Selain itu, kamu dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan logika matematika.

Kata kunci: premis, konjungsi, disjungsi, implikasi, bimplikasi, kontradiksi, tautologi, kontingensi, invers, konvers, kontraposisi, modus ponens, modus tollens, dan silogisme.

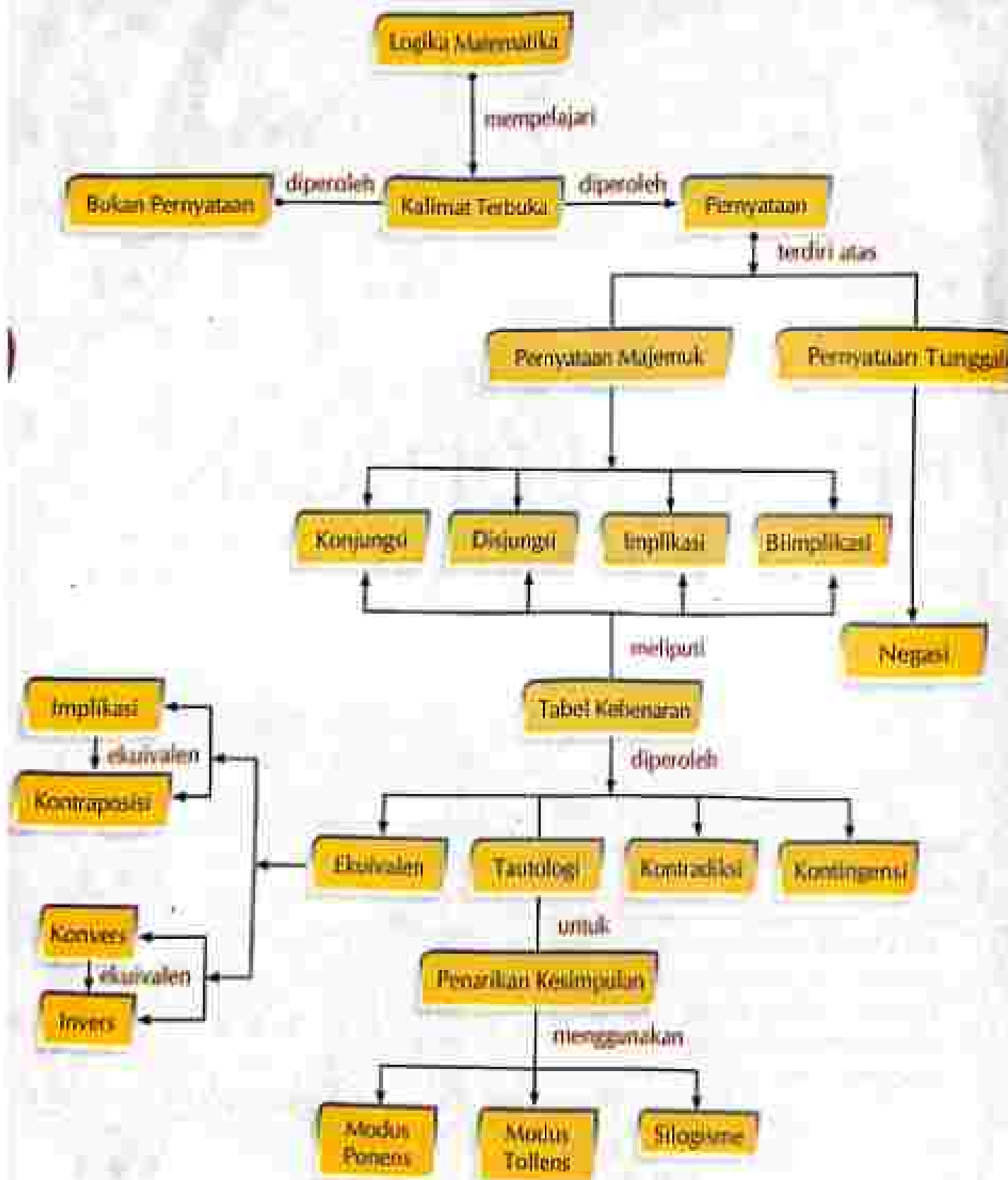
Metode Burhani adalah salah satu metode logika yang digunakan untuk menarik kesimpulan dari premis-premis yang telah diketahui. Tujuan dari metode Burhani adalah untuk menghasilkan kesimpulan, pengetahuan, atau informasi baru yang sebelumnya belum diketahui.

Mekanismenya adalah sebagai berikut: premis mayor + premis minor + middle term = kesimpulan.

Misalnya,

Semua makhluk yang bernyawa akan mati.
Kucing makhluk yang bernyawa.
Maka kucing akan mati.

MIND MAP



A. Pernyataan Tunggal

1. Pernyataan dan Bukan Pernyataan

Pernyataan (proposisi/deklarasi/statemen) adalah kalimat yang memiliki nilai kebenaran benar saja atau salah saja, tetapi tidak sekaligus benar dan salah. Bukan **pernyataan** adalah kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya atau memuat pengertian relatif atau masih merupakan sebuah prediksi.

Agar kamu dapat memahami pengertian pernyataan dan bukan pernyataan lebih jelas, perhatikanlah contoh-contoh berikut.

Contoh:

1. Surabaya adalah ibu kota provinsi Jawa Barat.
Kalimat tersebut merupakan **pernyataan** karena dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu salah.
2. Dua puluh tiga adalah bilangan ganjil.
Kalimat tersebut merupakan **pernyataan** karena dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu benar.
3. Makanan itu mahal harganya.
Kalimat tersebut **bukan** merupakan **pernyataan** karena tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu dapat bernilai salah dapat juga bernilai benar, mahal adalah relatif.
4. Alessandro Del Piero adalah pesepakbola kelahiran Italia.
Kalimat tersebut merupakan **pernyataan** karena dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu benar.
5. $2 + 10 = 21$
Kalimat tersebut merupakan **pernyataan** karena dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu salah.
6. Semua harimau bertelur.
Kalimat tersebut merupakan **pernyataan** karena dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu salah.
7. $x + 32 = 40$
Kalimat tersebut **bukan** merupakan **pernyataan** karena tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu dapat bernilai salah dapat juga bernilai benar.
8. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 20 = 0$ adalah 4 dan -5.
Kalimat tersebut merupakan **pernyataan** karena dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu benar.
9. k adalah bilangan kuadrat.
Kalimat tersebut **bukan** merupakan **pernyataan** karena tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu dapat bernilai salah dapat juga bernilai benar.
10. Ajeng adalah anak yang cantik.
Kalimat tersebut **bukan** merupakan **pernyataan** karena tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya, yaitu dapat bernilai salah dapat juga bernilai benar.

2. Lambang dan Nilai Kebenaran Sebuah Pernyataan

Pernyataan tunggal biasanya dilambangkan dengan huruf kecil, seperti p , q , r , dan sebagainya. Nilai kebenaran suatu pernyataan dapat ditulis menggunakan lambang huruf Yunani τ (dibaca tau).

TANYA & JAWAB

Contoh:

Bagaimana nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut?

1. p : Di dalam satu tahun masehi terdapat 12 bulan, $\tau(p) = B$
2. q : Bulan merupakan satelit buatan, $\tau(q) = S$
3. r : Bangkok adalah ibu kota Thailand, $\tau(r) = B$

Tanya:

Dapatkah kamu mengetahui nilai kebenaran dari pernyataan: "Persamaan kuadrat $4x^2 - 4x + 1 = 0$ mempunyai dua akar kembar"?

Jawab:

Ini adalah cara untuk mengetahuinya. Tentukan terlebih dahulu nilai a , b , dan c dari persamaan kuadratnya. $4x^2 - 4x + 1 = 0$; $a = 4$, $b = -4$, dan $c = 1$.

Untuk mengetahui jenis akar persamaan kuadrat, gunakan rumus diskriminan.

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

Oleh karena $D = 0$ maka persamaan kuadrat di atas mempunyai dua akar kembar.

Jadi, pernyataan yang diberikan bernilai benar.



MATH AROUND US

Misalkan, diketahui pernyataan: "Ajeng mengeluarkan uang sebesar Rp46.000,00 untuk mendapatkan 3 nada dering dan 2 nada sambung pribadi. Jika Dimas membayar Rp51.000,00 untuk mendapatkan 5 nada dering dan sebuah nada sambung pribadi maka harga sebuah nada dering adalah Rp7.500,00"

Benarkah pernyataan tersebut? Sekarang, coba kamu perhatikan uraian berikut.

Misalkan, harga sebuah nada dering dan nada sambung pribadi berturut-turut adalah x dan y maka

$$5x + y = 51.000 \quad \dots (1)$$

$$3x + 2y = 46.000 \quad \dots (2)$$

$$2 \times (1) - (2):$$

$$7x = 56.000 \Rightarrow x = 8.000$$

Jadi, pernyataan di atas bernilai salah.



3. Kalimat Terbuka

Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat peubah atau variabel sehingga belum dapat ditentukan benar atau salahnya. Sebuah kalimat terbuka akan menjadi suatu pernyataan apabila peubah tersebut diganti oleh suatu anggota semesta pembicaraan. Anggota semesta pembicaraan yang menggantikan peubah dalam kalimat terbuka sehingga menjadi pernyataan yang bernilai benar disebut dengan penyelesaian kalimat terbuka, sedangkan himpunan yang terdiri dari semua penyelesaian kalimat terbuka disebut himpunan penyelesaian.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

a. $x^2 - 4x + 4 = 0$

Kalimat di atas adalah kalimat terbuka karena belum memiliki nilai kebenaran, nilai kebenaran kalimat di atas bergantung dari nilai x .

b. Dia seorang guru

Kalimat di atas adalah kalimat terbuka karena belum memiliki nilai kebenaran, nilai kebenaran kalimat di atas bergantung dari "Dia".

c. Jika x dan y adalah peubah pada himpunan bilangan cacah maka himpunan penyelesaian dari persamaan $2x + y = 6$ adalah $\{(0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)\}$.

Kalimat di atas bukan kalimat terbuka karena sudah memiliki nilai kebenaran, atau kalimat di atas adalah pernyataan.

INFO MATEMATIKA

Logika adalah ilmu yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika. Logika adalah ilmu yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

Salah satu jenis logika adalah logika proposisional. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

- 1. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.
- 2. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.
- 3. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.
- 4. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.
- 5. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika. Logika proposisional adalah logika yang mempelajari tentang kebenaran yang didasarkan logika.

4. Ingkaran (Negasi)

Jika p adalah suatu pernyataan maka dapat dibuat suatu pernyataan lain yang dibentuk dari p , yaitu dengan memberikan kata "salah bahwa ..." sebelum pernyataan p atau dengan menyisipkan kata "tidak" atau "bukan" pada pernyataan p yang disebut **negasi** atau **ingkaran** atau **penyangkalan** dari pernyataan p . Negasi dari pernyataan p ditulis: $\sim p$ atau $\bar{p}$.

Sifat negasi: Jika p benar, maka $\sim p$ salah dan jika p salah maka $\sim p$ benar.

Tabel 5.1 Tabel Kebenaran Negasi

p	$\sim p$
B	S
S	B

Ingkaran dapat digambarkan dalam diagram Venn sebagai berikut.



p : Himpunan nilai benar pernyataan p

Komplemen p (daerah yang diarsir) adalah nilai salah pernyataan $\sim p$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana kalimat ingkaran dari pernyataan berikut?

- $p: 3 \times 5 = 15$
- q : Surabaya adalah Ibu kota Jawa Tengah
- $r: 4 < 10$
- s : Belanda tidak termasuk dalam Benua Australia
- t : 3 merupakan bilangan genap

Jawab:

Ingkaran atau negasinya adalah sebagai berikut.

- $\sim p: 3 \times 5 \neq 15$, $\tau(\sim p) = 5$
- $\sim q$: Surabaya bukan Ibu kota Jawa Tengah atau
Tidak benar bahwa Surabaya Ibu kota Jawa Tengah, $\tau(\sim q) = 5$
- $\sim r: 4 \geq 10$, $\tau(\sim r) = 5$
- $\sim s$: Belanda termasuk dalam Benua Australia, $\tau(\sim s) = 5$
- $\sim t$: salah bahwa 3 merupakan bilangan genap, $\tau(\sim t) = 5$

ASAHA OTAK

PERNYATAAN TUNGGAH

Untuk nomor 1 – 15, manakah yang merupakan pernyataan?

Dapatkan kamu menuliskan ingkaran dari yang merupakan pernyataan?

1. Gedung itu sangat tinggi.
2. Apakah 5 merupakan bilangan prima?
3. $\cos^2 60 + \sin^2 60 = 1$
4. Koordinat titik balik parabola $y = 4x^2 - 4x - 15$ adalah $(\frac{1}{2}, -16)$
5. $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$
6. $\{0\} = \emptyset$
7. Merkurius adalah salah satu planet yang ada dalam Galaksi Bimasakti.
8. $x^2 - 4x + 10 < 0$, dengan $x \in \mathbb{R}$.
9. Udara di puncak sangat dingin.
10. Mie Ayam buatan Bu Ratih memang enak.
11. Setiap tanggal 14 Agustus, Indonesia memperingati hari Pramuka.
12. Jumlah uang Ani dan Nunung adalah Rp5.000,00.
13. Buanglah sampah pada tempatnya!
14. $\sqrt{3} \square \sqrt{3} \square 6$
15. Prita merupakan anak yang pandai.

Untuk nomor 16 – 30, bagaimana ingkaranannya? Bagaimana pula nilai kebenarannya?

16. Sebelas bukan bilangan prima.
17. Grafik fungsi $y = 3x$ melalui titik (2, 9).
18. $\tan 210^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
19. ${}^2\log 8 = 3$
20. Persamaan kuadrat $3x^2 - 5x + 2 = 0$ tidak memiliki akar yang real.
21. Segitiga merupakan poligon bersisi tiga.
22. $17 \times 8 < 126$
23. Lagu kebangsaan dari negara Inggris adalah *God Saved The Queen*.
24. Semua makhluk hidup akan mati.
25. Himpunan bilangan ganjil merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan asli.
26. Tidak benar belah ketupat memiliki 2 pasang sisi yang sama panjang.
27. Jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 360° .
28. Gradien dari persamaan garis $y = 2x + 1$ adalah $\frac{1}{2}$.
29. Salah bahwa luas lingkaran yang memiliki jari-jari 7 cm adalah 154 cm.
30. Tujuh belas merupakan bilangan komposit.



AMAZING PERSON



LEWIS CARROLL, (1832 - 1898)

Penulis, Ahli Logika, dan Matematikawan

Lewis Carroll merupakan nama pena dari Charles Lutwidge Dodgson. Ia merupakan profesor matematika di Universitas Oxford, yang mendalami logika matematika.

Lahir di Daresbury, sebuah desa kecil yang berlokasi di barat laut Warrington di Cheshire utara. Dodgson merupakan anak ketiga dari tujuh bersaudara.

Dalam usia yang relatif muda, Dodgson menghibur saudara-saudaranya dengan permainan, sulap, dan pertunjukan boneka yang menarik. Ketika dewasa, Dodgson tertarik pada teater, pertunjukan sulap, dan pertunjukan hiburan lainnya.

Ia kemudian menulis buku cerita anak yang berjudul "Alice's in The Wonderland". Buku ini terjual laris di berbagai negara dan telah diilustrasikan ke dalam 60 bahasa. Kesuksesan buku "Alice's in The Wonderland" ternyata tidak lepas dari imajinasi dan kemampuannya dalam menggunakan dan menerapkan konsep logika dalam setiap ceritanya.

Karya-karya Dodgson yang lainnya adalah: *Sylvie and Bruno stories*, *Eight or Nine Wise Words About Letter-Writing*, *The Nursery Alice*, *Curious Mathematica*, *Symbolic Logic*, *The Game of Logic*, *Rhyme? And Reason?*, *Three Sunsets and Other Poems*, *Phantasmagoria and Other Poems*, and *A Tangled Tale*.



Sumber: <http://153.photobucket.com/10230014/lewis-carroll-1832-1898>
<http://www.oxford.com/doc/10230014/lewis-carroll-1832-1898>

B. Pernyataan Majemuk

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar atau membaca pernyataan-pernyataan berikut.

1. Menerima fotokopi dan laminating.
2. Soal ini untuk latihan atau ulangan.
3. Jika hari hujan maka saya tidak pergi belanja.
4. Saya akan senang jika dan hanya jika saya dapat bertemu dengan dia.

Pernyataan-pernyataan di atas merupakan pernyataan majemuk. Jadi, **pernyataan majemuk** adalah pernyataan yang terdiri lebih dari satu pernyataan. Pada bagian ini kita akan mempelajari pernyataan majemuk.

1. Konjungsi

a. Pengertian Konjungsi

Dua pernyataan yang dirangkai dengan kata penghubung "dan" untuk membentuk suatu pernyataan majemuk disebut **konjungsi** dari pernyataan semula. Dalam konjungsi, kata logika "dan" dapat diganti dengan "tetapi", "meskipun", atau "walaupun".

Dalam bentuk lambang, konjungsi dilambangkan dengan " $\wedge$ " atau "&".

b. Tabel Kebenaran Konjungsi

Untuk dapat menentukan tabel kebenaran dari konjungsi, perhatikan ilustrasi berikut.

Ajeng : Mas, kenapa kamu disuruh berdiri sambil menghormat ke bendera sebagai upacara?
Dimas : Aku terkena hukuman.
Ajeng : Kenapa kamu dihukum, padahal kamu memakai topi sewaktu upacara?
Dimas : Iya, tapi aku ga pake dasi.
Ajeng : Ohh...

Dari ilustrasi di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa Dimas bersalah sehingga mendapat hukuman karena melanggar aturan, yaitu "Pada upacara hari Senin, seluruh siswa wajib mengenakan dasi dan topi". Agar tidak melanggar, seharusnya Dimas menggunakan dasi dan topi. Seandainya ada dua pernyataan yang bernilai benar, yaitu sebagai berikut.

Pernyataan p : Dimas memakai dasi, $v(p) = B$

Pernyataan q : Dimas memakai topi, $v(q) = B$

Kedua pernyataan tunggal di atas dapat dibuat menjadi 4 pernyataan majemuk, yaitu

Dimas memakai dasi dan memakai topi

B

B

Dimas memakai dasi dan tidak memakai topi

B

S

Dimas tidak memakai dasi dan memakai topi

S

B

Dimas tidak memakai dasi dan tidak memakai topi

S

S

Dimas tidak akan dihukum

B

Dimas mendapat hukuman

S

Dimas mendapat hukuman

S

Dimas mendapat hukuman

S

Nilai kebenaran konjungsi dapat dinyatakan dengan tabel, yaitu sebagai berikut.

Tabel 5.2 Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Notes

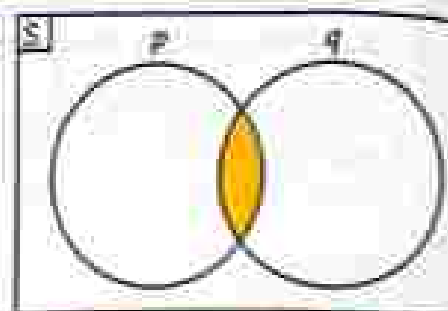
Konjungsi bernilai benar jika kedua pernyataan bernilai benar.

Konjungsi dapat digambarkan dalam diagram Venn seperti gambar di samping.

p : Himpunan nilai benar pernyataan p

q : Himpunan nilai benar pernyataan q

Irisan $p \cap q$ (daerah yang diarsir) adalah nilai benar pernyataan $p \wedge q$.



Notes

Negasi dari implikasi $(p \wedge q)$ adalah $\neg p \vee \neg q$. Jadi, $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Jika terdapat pernyataan berikut, dapatkah kamu mengetahui nilai kebenarannya?

- $5 \times 2 = 10$ dan $5 \times 1 \neq 5$
- $x^2 - 10x + 25 = 0$ mempunyai akar kembar dan grafik $y = x^2 - 10x + 25$ memotong sumbu y di titik $(25, 0)$.

Jawab:

- Ini adalah cara untuk mengetahuinya.

$$p : 5 \times 2 = 10, \tau(p) = B, \quad q : 5 \times 1 \neq 5, \tau(q) = S$$

$$p \wedge q : 5 \times 2 = 10 \text{ dan } 5 \times 1 \neq 5, \tau(p \wedge q) = S$$

- Perhatikan langkah-langkah berikut.

$$p : x^2 - 10x + 25 = 0 \text{ mempunyai akar kembar, } \tau(p) = B$$

$$q : \text{Grafik } y = x^2 - 10x + 25 \text{ memotong sumbu } y \text{ di titik } (25, 0), \tau(q) = B$$

$$p \wedge q : x^2 - 10x + 25 = 0 \text{ mempunyai akar kembar dan grafik } y = x^2 - 10x + 25 \text{ memotong sumbu } y \text{ di titik } (25, 0), \tau(p \wedge q) = B$$

Tanya:

Bagaimana bentuk negasi dari "Hari ini hujan deras dan aliran listrik tidak terputus"?

Jawab:

Misalkan, p : Hari ini hujan deras dan q : Aliran listrik tidak terputus.

Negasinya adalah $\neg p \vee \neg q$: Hari ini hujan tidak deras atau aliran listrik terputus.

2. Disjungsi

a. Pengertian Disjungsi

Dua pernyataan yang dirangkai dengan kata penghubung "atau" untuk membentuk suatu pernyataan majemuk disebut disjungsi dari pernyataan semula.

Dalam bentuk lambang, disjungsi dilambangkan dengan " $\vee$ ".

b. Tabel Kebenaran Disjungsi

Untuk dapat menentukan tabel kebenaran dari disjungsi, perhatikan ilustrasi berikut.

Sehabis pelajaran olahraga Dimas berlari menuju kantin.
Pelayan : Maaf, kamu mau minum es teh atau es jeruk?
Dimas : Apa ajalah yang penting bisa ngilangin hausku.
Pelayan : Siap boss ...

Dari ilustrasi di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa Dimas ingin menghilangkan hausnya dengan minuman yang tidak ditentukan. Dari ilustrasi tersebut, kita dapat menuliskan Dimas dapat minum es teh atau es jeruk.

Seandainya ada dua pernyataan yang bernilai benar, yaitu sebagai berikut.

Pernyataan p : Dimas mau minum es teh, $v(p) = B$

Pernyataan q : Dimas mau minum es jeruk, $v(q) = B$

Kedua pernyataan tunggal di atas dapat dibuat menjadi 4 pernyataan majemuk, yaitu

Dimas mau minum es teh atau mau minum es jeruk

B

B

Dimas mau minum es teh atau tidak mau minum es jeruk

B

S

Dimas tidak mau minum es teh atau mau minum es jeruk

S

B

Dimas tidak mau minum es teh atau tidak mau minum es jeruk

S

S

Dimas tidak haus

B

Dimas tidak haus

B

Dimas tidak haus

B

Dimas haus

S

Dengan demikian, nilai kebenaran disjungsi dapat dinyatakan dengan tabel, yaitu sebagai berikut.

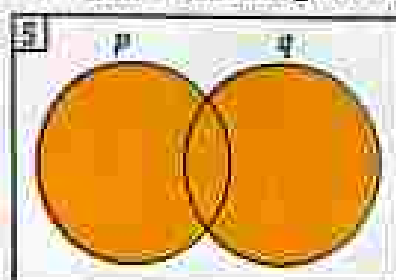
Tabel 5.3 Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Notes

Disjungsi bernilai salah jika kedua pernyataan bernilai salah.

Disjungsi dapat digambarkan dalam diagram Venn sebagai berikut.



p : Himpunan nilai benar pernyataan p

q : Himpunan nilai benar pernyataan q

Gabungan $p \cup q$ (daerah yang diarsir) adalah nilai benar pernyataan $p \vee q$.

Notes

Negasi dari implikasi $(p \vee q)$ adalah $\neg p \wedge \neg q$. Jadi, $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dapatkah kamu menentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut?

1. Nol bukan bilangan prima atau 0 adalah elemen identitas pada penjumlahan
2. Yogyakarta ada di Pulau Jawa atau $5 \times 3 \neq 15$.
3. ${}^2\log 5 \cdot {}^2\log 64 = 5$ atau $\sin (2.205)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jawab:

1. p : Nol bukan bilangan prima, $\tau(p) = B$
 q : Nol adalah elemen identitas pada penjumlahan, $\tau(q) = B$
 $p \vee q$: Nol bukan bilangan prima atau 0 adalah elemen identitas pada penjumlahan
 $\tau(p \vee q) = B$
2. p : Yogyakarta ada di Pulau Jawa, $\tau(p) = B$
 q : $5 \times 3 \neq 15$, $\tau(q) = S$
 $p \vee q$: Yogyakarta ada di Pulau Jawa atau $5 \times 3 \neq 15$, $\tau(p \vee q) = B$
3. p : ${}^2\log 5 \cdot {}^2\log 64 = 5$, $\tau(p) = S$
 q : $\sin (2.205)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tau(q) = S$
 $p \vee q$: ${}^2\log 5 \cdot {}^2\log 64 = 5$ atau $\sin (2.205)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tau(p \vee q) = S$

Tanya:

Bagaimana bentuk negasi dari pernyataan majemuk "Grafik $x^2 - 2x + 3 = 0$ melalui titik $(1, 2)$ atau $3x > 6$ untuk $x > 2$ "?

Jawab:

Misalkan, p : Grafik $x^2 - 2x + 3 = 0$ melalui titik $(1, 2)$, q : $3x > 6$ untuk $x > 2$.

Negasi dari disjungsi adalah $\neg p \wedge \neg q$. Jadi, $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

$\neg p \wedge \neg q$: Grafik $x^2 - 2x + 3 = 0$ tidak melalui titik $(1, 2)$ dan $3x = 6$ untuk $x \neq 2$.



TAKE A BREAK

Diskusikan soal-soal berikut dengan temanmu. Dapatkah kamu menentukan jawabannya?

Soal-soal di bawah ini merupakan persoalan yang menuntut kemampuan logikamu. Selamat mengerjakan ya.

1. Kamu berada di sebuah ruangan. Di ruangan itu ada tiga buah saklar yang terhubung dengan tiga buah lampu di ruangan sebelah. Tiga buah lampu tersebut masing-masing berwarna merah, kuning, dan hijau. Sayangnya, kamu tidak tahu saklar yang mana yang berhubungan dengan lampu merah, kuning dan hijau tersebut. Kamu juga tidak bisa mengintip ke ruangan sebelah dari ruangan tempat kamu berada sekarang. Meski demikian, kamu diperbolehkan untuk pergi ke ruangan sebelah hanya sekali. Setelah kembali dari sana, kamu harus sudah bisa menentukan warna lampu yang berhubungan dengan masing-masing saklar tersebut.
2. Di dalam ruangan rapat, baru 3 peserta yang datang, yaitu Pak Kuning, Pak Hijau, dan Pak Cokelat. Mereka memakai dasi berwarna kuning, hijau, dan cokelat. Pak Kuning berkata: "Apa Anda memperhatikan bahwa warna dari dasi kita berbeda dari nama kita?". Lelaki yang memakai dasi hijau berkata, Ya, Anda benar." Tahukah Anda nama bapak dan warna dasi mereka?
3. Mia mempunyai seekor kuda. "Apakah kamu mengetahui warna kuda saya?" tanya Mia.
Budi berkata, "saya rasa warnanya bukan hitam"
Abdul berkata, "Warnanya cokelat atau abu-abu".
Fahri said "aku tahu, warnanya cokelat".
Mia berkata, "Setidaknya, salah satu dari kalian benar, dan salah satu dari kalian benar".
Apa warna kuda Mia berdasarkan pernyataan tersebut?
4. Terdapat dua buah gelas. Gelas pertama diisi dengan air berwarna merah dan yang lainnya diisi dengan air berwarna hijau dengan volume yang sama. Ambil sesendok air hijau dan tuangkan ke dalam gelas berisi air berwarna merah. Lalu, ambil sesendok air berwarna merah dan tuangkan ke dalam gelas berisi air berwarna hijau. Apakah volume air berwarna hijau dalam air berwarna merah lebih banyak dibandingkan volume air berwarna merah dalam air berwarna hijau? Atau justru sebaliknya?



3. Konjungsi dan Disjungsi pada Rangkaian Listrik

Berikut digambarkan jaringan listrik yang paling sederhana.



Saklar dapat dianggap sebagai suatu pernyataan yang bernilai benar pada saat tertutup (*on*) dan bernilai salah pada saat terbuka (*off*).

Jaringan tertutup dan terbuka dapat disajikan dalam tabel berikut.

	Jaringan tertutup (<i>on</i>) B
	Jaringan terbuka (<i>off</i>) S

Dua buah saklar dapat disusun secara seri dan paralel, seperti pada gambar berikut.



Dalam posisi terbuka dan tertutup, terdapat 4 kemungkinan untuk merangkai dua buah saklar (p dan q) secara seri, yaitu

1. p tertutup (B) dan q tertutup (B) maka lampu akan menyala (B)
2. p tertutup (B) dan q terbuka (S) maka lampu tidak akan menyala (S)
3. p terbuka (S) dan q tertutup (B) maka lampu tidak akan menyala (S)
4. p terbuka (S) dan q terbuka (S) maka lampu tidak akan menyala (S)

Di dalam rangkaian listrik, rangkaian seri dalam logika matematika identik dengan **konjungsi**.

Dalam posisi terbuka dan tertutup, terdapat 4 kemungkinan untuk merangkai dua buah saklar (p atau q) secara paralel, yaitu

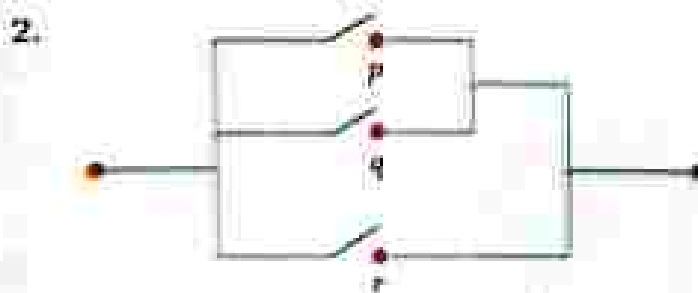
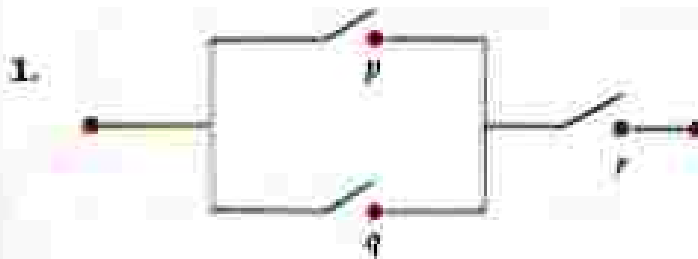
1. p tertutup (B) dan q tertutup (B) maka lampu akan menyala (B)
2. p tertutup (B) dan q terbuka (S) maka lampu akan menyala (B)
3. p terbuka (S) dan q tertutup (B) maka lampu akan menyala (B)
4. p terbuka (S) dan q terbuka (S) maka lampu tidak akan menyala (S)

Di dalam rangkaian listrik, rangkaian paralel dalam logika matematika identik dengan **disjungsi**.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Dapatkanlah kamu menentukan lambang logika dari jaringan listrik berikut?



Jawab:

1. $(p \vee q) \wedge r$

2. $(p \vee q) \vee r$

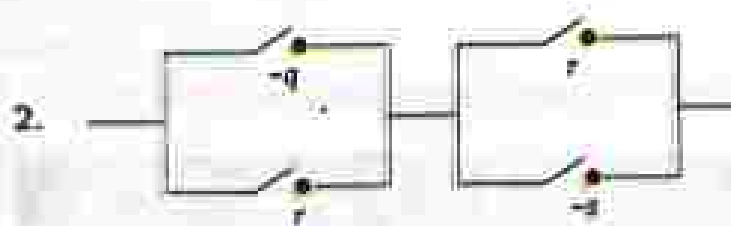
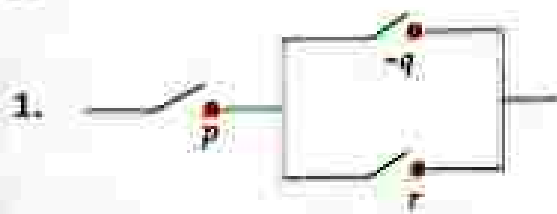
Tanya:

Seperti apa gambarkan jaringan listriknya jika diketahui notasi pernyataan majemuk sebagai berikut?

1. $p \wedge (\neg q \vee r)$

2. $(p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg s)$

Jawab:



4. Implikasi (Kondisional)

a. Pengertian Implikasi

Dari dua buah pernyataan p dan q , dapat dibuat pernyataan majemuk dalam bentuk "jika p maka q " yang disebut **implikasi** atau pernyataan bersyarat. Pernyataan p disebut **alasan** atau **sebab** (hipotesis) dan pernyataan q disebut **kesimpulan**.

Implikasi jika p maka q dilambangkan $p \Rightarrow q$. Notasi $p \Rightarrow q$ dibaca juga

- (1) p hanya jika q
- (2) q jika p
- (3) p syarat cukup bagi q
- (4) q syarat perlu bagi p

b. Tabel Kebenaran Implikasi

Nilai kebenaran implikasi dinyatakan pada tabel berikut.

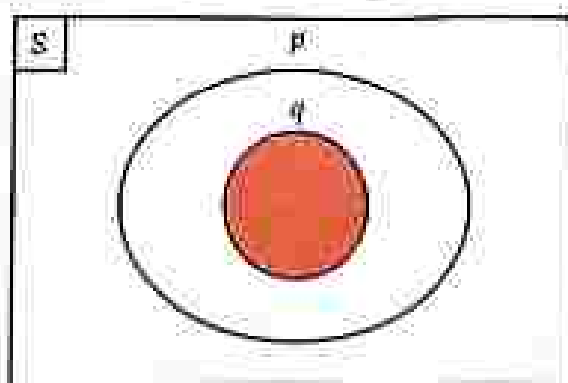
Tabel 5.4 Tabel Kebenaran Implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Notes

Implikasi bernilai salah, jika pernyataan pertama benar dan pernyataan kedua salah.

Implikasi dapat digambarkan dalam diagram Venn sebagai berikut.



p : Himpunan nilai benar pernyataan p

q : Himpunan nilai benar pernyataan q

Pernyataan $p \Rightarrow q$ mempunyai nilai-nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan $p \subseteq q$.

Notes

Negasi dari implikasi ($p \Rightarrow q$) adalah $p \wedge \neg q$. Jadi, $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tahukah kamu nilai kebenaran setiap pernyataan berikut?

1. Jika Yogyakarta Ibu kota Indonesia maka $2 + 4 = 7$.
2. Jika $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka 60° di kuadran II.
3. Jika grafik $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ melalui titik $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ maka Juventus adalah salah satu tim sepakbola asal Italia.

Jawab:

1. p : Yogyakarta Ibu kota Indonesia, $\tau(p) = S$
 q : $2 + 4 = 7$, $\tau(q) = S$
 $p \Rightarrow q$: Jika Yogyakarta Ibu kota Indonesia maka $2 + 4 = 7$, $\tau(p \Rightarrow q) = B$
2. p : $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tau(p) = B$
 q : 60° di kuadran II, $\tau(q) = S$
 $p \Rightarrow q$: Jika $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka 60° di kuadran II, $\tau(p \Rightarrow q) = S$
3. p : grafik $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ melalui titik $\left(2, \frac{1}{4}\right)$, $\tau(p) = B$
 q : Juventus adalah salah satu tim sepakbola asal Italia, $\tau(q) = B$
 $p \Rightarrow q$: Jika grafik $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ melalui titik $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ maka Juventus adalah salah satu tim sepakbola asal Italia, $\tau(p \Rightarrow q) = B$

Tanya:

Dapatkah kamu menentukan nilai x agar implikasi "Jika $3x - 2 > 10$ maka 9 adalah bilangan prima" bernilai salah?

Jawab:

p : $3x - 2 > 10$, $\tau(p) = ?$
 q : 9 adalah bilangan prima, $\tau(q) = S$
 Agar implikasi $p \Rightarrow q$ bernilai salah, nilai $\tau(p)$ haruslah bernilai benar. Nilai x dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$$3x - 2 > 10$$

$$x > 4$$

Nilai x yang memenuhi adalah $x > 4$.

Tanya:

Bagaimana negasi dari pernyataan majemuk "Jika Ani tidak masuk sekolah maka ia sakit"?

Jawab:

Misal, p : Ani tidak masuk sekolah

q : ia sakit

Negasi dari implikasi $(p \Rightarrow q)$ adalah $p \wedge \neg q$.

Jadi, negasinya adalah Ani tidak masuk sekolah dan ia tidak sakit.

5. Biimplikasi (Bikondisional)

a. Pengertian Biimplikasi

Pernyataan bersyarat berbentuk p jika dan hanya jika q disebut biimplikasi (implikasi dua arah).

Pernyataan ini adalah gabungan dari $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$ sehingga disebut implikasi dua arah.

Biimplikasi p jika dan hanya jika q dalam bentuk lambang dinyatakan $p \Leftrightarrow q$.

Notasi $p \Leftrightarrow q$ dibaca juga

- (1) p bila dan hanya bila q
- (2) jika p maka q dan jika q maka p
- (3) p syarat perlu dan cukup bagi q
- (4) q syarat perlu dan cukup bagi p

b. Tabel Kebenaran Biimplikasi

Nilai kebenaran biimplikasi dinyatakan pada tabel berikut.

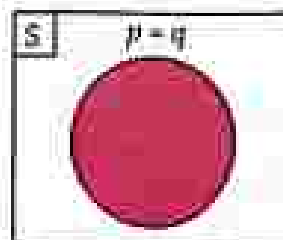
Tabel 5.5 Tabel Kebenaran Biimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Notes

Biimplikasi bernilai benar jika kedua pernyataan bernilai benar atau kedua pernyataan bernilai salah.

Biimplikasi dapat digambarkan dalam diagram Venn sebagai berikut.



p : Himpunan nilai benar pernyataan p

q : Himpunan nilai benar pernyataan q

$p \Leftrightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan $p = q$.

$p = q$ berarti $x \in p$ jika dan hanya jika $x \in q$.

Notes

Negasi dari biimplikasi $(p \Leftrightarrow q)$ adalah $p \wedge \neg q$. Jadi, $\neg(p \Leftrightarrow q) = \neg p \Leftrightarrow q = p \Leftrightarrow \neg q$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana nilai kebenaran dari himpikanasi berikut?

1. 3 adalah bilangan prima jika dan hanya jika $3 \times 5 = 8$.
2. ${}^2\log \frac{1}{16} = -4$ jika dan hanya jika $2^{-4} = \frac{1}{16}$.
3. $x^2 - x - 20 = 0$ mempunyai dua akar kembar jika dan hanya jika $x^2 - 4x + 4 = 0$ mempunyai dua akar yang berlainan.

Jawab:

1. p : 3 adalah bilangan prima, $\tau(p) = B$
 q : $3 \times 5 = 8$, $\tau(q) = S$
 $p \Leftrightarrow q$: 3 adalah bilangan prima jika dan hanya jika $3 \times 5 = 8$, $\tau(p \Leftrightarrow q) = S$
2. p : ${}^2\log \frac{1}{16} = -4$, $\tau(p) = B$
 q : ${}^2\log \frac{1}{16}$, $\tau(q) = B$
 $p \Leftrightarrow q$: ${}^2\log \frac{1}{16} = -4$ jika dan hanya jika $2^{-4} = \frac{1}{16}$, $\tau(p \Leftrightarrow q) = B$
3. p : $x^2 - x - 20 = 0$ mempunyai dua akar kembar, $\tau(p) = S$
 q : $x^2 - 4x + 4 = 0$ mempunyai dua akar yang berlainan, $\tau(q) = S$
 $p \Leftrightarrow q$: $x^2 - x - 20 = 0$ mempunyai dua akar kembar jika dan hanya jika $x^2 - 4x + 4 = 0$ mempunyai dua akar yang berlainan, $\tau(p \Leftrightarrow q) = B$.

Tanya:

Dapatkan kamu menentukan nilai x agar himpikanasi

" ${}^2\log 81 = 4$ jika dan hanya jika $x^2 - 11x + 24 = 0$ " bernilai benar.

Jawab:

p : ${}^2\log 81 = 4$, $\tau(p) = B$

q : $x^2 - 11x + 24 = 0$, $\tau(q) = ?$

Agar himpikanasi $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar, nilai $\tau(q)$ harus bernilai benar juga.

Nilai x dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$(x - 3)(x - 8) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = 8$$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x = 3$ atau $x = 8$.

Tanya:

Tentukan negasi dari pernyataan majemuk "Ani tidak masuk sekolah jika dan hanya jika ia sakit".

Jawab:

Misalkan, p : Ani tidak masuk sekolah, q : ia sakit

Negasi dari himpikanasi adalah $\neg p \Leftrightarrow q$ atau $p \Leftrightarrow \neg q$.

$$\neg(p \Leftrightarrow q) = \neg p \Leftrightarrow q = p \Leftrightarrow \neg q$$

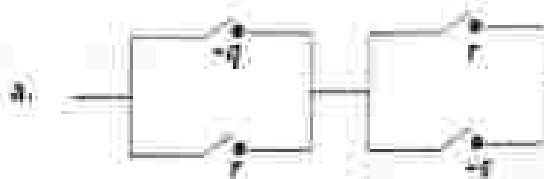
Ani tidak masuk sekolah jika dan hanya jika ia tidak sakit, atau Ani masuk sekolah jika dan hanya jika ia sakit.

ASAHI OTAK

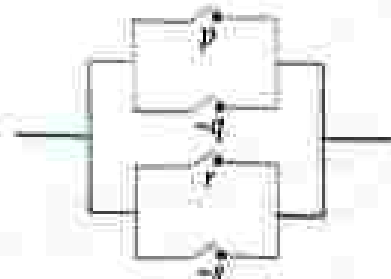
PERNYATAAN MAJEMUK

Jawablah pertanyaan berikut.

1. Apa nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut?
 - a. $3 + 5 > 8$ dan 8 adalah bilangan komposit.
 - b. $3 \log 243 = 5$ dan $\frac{2^6}{2^5} > 10$
 - c. TBC merupakan penyakit yang disebabkan oleh bakteri atau Sungai Musi terletak di Kalimantan Barat.
 - d. $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional atau $\sqrt{8} = 2$.
 - e. Jika 7 merupakan bilangan prima maka 5 adalah bilangan ganjil.
 - f. Burung merpati dapat terbang jika dan hanya jika burung merpati mempunyai sayap.
2. Bagaimana kalimat negasi dari pernyataan majemuk berikut?
 - a. Saya lulus SMPTN dan saya senang.
 - b. Hari ini tidak hujan atau angin bertiup tidak kencang.
 - c. jika nilai rupiah terus menguat terhadap dolar maka krisis moneter akan segera berakhir.
 - d. Jika besok diadakan ujian maka Hasan akan meminjam buku catatan Lina.
 - e. Air akan mendidih jika dan hanya jika mencapai suhu 100°C .
 - f. Manusia akan masuk penjara jika dan hanya jika ia melakukan kejahatan.
3. Seperti apa gambar jaringan listrik dari lambang logika berikut?
 - a. $p \wedge q \wedge (r \vee s)$
 - b. $[(r \vee s) \vee \neg s] \wedge s$
 - c. $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$
 - d. $(q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee p)$
4. Apa simbol logika matematika untuk jaringan listrik berikut?



b.



6. Berapakah nilai x agar pernyataan-pernyataan majemuk berikut bernilai salah?
 - a. $\sin 540^\circ\text{C} = 1$ atau x adalah binatang berkaki empat.
 - b. Jika Reog adalah kesenian yang berasal dari Jawa Timur maka x adalah senjata tradisional Aceh.
 - c. Jika $(x, -1)$ adalah titik potong dari $y = 2x - 3$ dan $3x - 4y = 7$ maka Gunung Galunggung terletak di Kalimantan Barat.
 - d. $\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $\log 0.0001 = x$.

C. Tabel Kebenaran, Ekuivalensi, Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi dari Pernyataan Majemuk

1. Tabel kebenaran

Tabel kebenaran adalah tabel yang digunakan untuk melihat hubungan antara nilai kebenaran pernyataan-pernyataan yang membentuknya.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Buatlah tabel kebenaran dari pernyataan majemuk $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

Jawab:

$$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Langkah untuk membuat tabel kebenaran pernyataan di atas adalah sebagai berikut.

- Buatlah 7 kolom, dua kolom pertama diisi dengan dua pernyataan p dan q . Dua kolom selanjutnya diisi dengan ingkaran p dan q . Satu kolom diisi dengan pernyataan $p \wedge \sim q$. Satu kolom diisi dengan pernyataan $q \wedge \sim p$. Adapun kolom terakhir diisi dengan pernyataan $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.
- Buatlah empat baris yang diisi dengan nilai kebenaran dari p dan q . Untuk pernyataan majemuk yang mengandung n pernyataan maka banyaknya baris adalah 2^n .

Tabel kebenaran pernyataan majemuk $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ dapat diperlihatkan sebagai berikut.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$q \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
B	B	S	S	S	S	S
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	S	S

Jadi, nilai kebenaran dari $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ adalah S B B S.

Dengan menggunakan tabel, kita akan cukup kesulitan jika pernyataan majemuk tersebut terdiri dari banyak pernyataan lainnya. Untuk itu, kita dapat menggunakan cara lain menentukan nilai kebenaran. Perhatikan kembali contoh di atas.

1	2	3	4	5	6	7
$(p$	$\wedge$	$\sim q)$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$\sim p)$
B	S	S	S	B	S	S
B	B	B	B	S	S	S
S	S	S	B	B	B	B
S	S	B	S	S	S	B

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1	2	1	4	1	3	1
---	---	---	---	---	---	---

→ Langkah ke-4

Jadi, nilai kebenaran dari $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ adalah S B B S.

2. Ekuivalensi

Dua pernyataan majemuk A dan B dikatakan ekuivalen jika memiliki nilai kebenaran yang sama, ditulis $A \Leftrightarrow B$.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Buatlah pernyataan yang ekuivalen dengan pernyataan majemuk $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.

Jawab:

Untuk mengetahuinya, perhatikan tabel berikut.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Sama

Dari tabel di atas, terlihat bahwa nilai kebenaran $\neg(p \vee q)$ sama dengan nilai kebenaran

$\neg p \wedge \neg q$.

Ditulis, $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.

Tanya:

Buatlah pernyataan yang ekuivalen dengan pernyataan majemuk $p \Leftrightarrow q = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$?

Jawab:

Untuk mengetahuinya, perhatikan tabel berikut.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee p$	$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
B	B	S	B	B	B	B	B
B	S	S	S	S	S	B	S
S	B	B	S	S	B	S	S
S	S	B	B	B	B	B	B

Sama

Dari tabel di atas, terlihat bahwa nilai kebenaran $p \Leftrightarrow q$ sama dengan nilai kebenaran

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

Ditulis, $p \Leftrightarrow q = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

3. Tautologi

Tautologi adalah sebuah pernyataan majemuk yang selalu benar untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Apakah $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ merupakan tautologi?

Jawab:

Perhatikanlah tabel berikut untuk mengetahuinya.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ adalah benar untuk setiap pernyataan-pernyataan komponennya, $\tau[[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q] = B B B B$.

Jadi, $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ merupakan tautologi.

Tanya:

Apakah $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)]$ merupakan tautologi?

Jawab:

Perhatikanlah tabel berikut untuk mengetahuinya.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim p \vee q$	$\sim q \vee r$	$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)]$	$\sim p \vee r$	$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \Rightarrow (\sim p \vee r)$
B	B	B	B	B	S	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	B	B	S	S	B	B
B	S	B	S	B	S	S	S	S	B	B
B	S	S	S	S	B	S	S	S	S	B
S	B	B	S	S	S	B	S	S	B	B
S	B	S	S	B	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	S	B	S	S	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B	B	B	B

Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)]$ adalah benar untuk setiap pernyataan-pernyataan komponennya, $\tau[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] = B B B B B B B B$.

Jadi, $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)]$ merupakan tautologi.

4. Kontradiksi

Kontradiksi adalah sebuah pernyataan majemuk yang selalu salah untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tunjukkan bahwa $\{p \wedge (p \leftrightarrow \neg q)\} \wedge q$ adalah pernyataan majemuk yang kontradiksi.

Jawab:

Perhatikan tabel berikut.

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$p \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$	$\{p \wedge (p \leftrightarrow \neg q)\} \wedge q$
B	B	S	S	S	S
B	S	B	B	B	S
S	B	S	S	S	S
S	S	B	S	S	S

Dari tabel di atas, terlihat bahwa nilai kebenaran $\{p \wedge (p \leftrightarrow \neg q)\} \wedge q$ adalah salah untuk setiap pernyataan-pernyataan komponennya, $\tau[\{(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)\}] = SSSS$.

Jadi, $\{p \wedge (p \leftrightarrow \neg q)\} \wedge q$ merupakan kontradiksi.

Tanya:

Benarkah $\neg\{(\neg p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \neg q)\}$ adalah pernyataan majemuk yang kontradiksi?

Jawab:

Perhatikan tabel berikut:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow \neg q$	$(\neg p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \neg q)$	$\neg\{(\neg p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \neg q)\}$
B	B	B	S	S	B	S	B	S
B	B	S	S	S	B	S	B	S
B	S	B	S	B	B	B	B	S
B	S	S	S	B	B	B	B	S
S	B	B	B	S	B	B	B	S
S	B	S	B	S	S	B	B	S
S	S	B	B	B	B	B	B	S
S	S	S	B	B	S	B	B	S

Dari tabel di atas, terlihat bahwa nilai kebenaran $\neg\{(\neg p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \neg q)\}$ adalah salah untuk setiap pernyataan-pernyataan komponennya, $\tau[\{(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)\}] = SSSSSSSS$.

Jadi, benar bahwa $\neg\{(\neg p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \neg q)\}$ merupakan kontradiksi.

4. Kontingensi

Kontingensi adalah sebuah pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya memuat benar dan salah.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Apakah $p \wedge [q \wedge (p \vee q)]$ adalah pernyataan majemuk yang kontingensi?

Jawab:

Gunakanlah tabel kebenaran untuk mengetahuinya.

p	q	$q \wedge (p \vee q)$	$p \wedge [q \wedge (p \vee q)]$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	B	S
S	S	S	S

Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran $p \wedge [q \wedge (p \vee q)]$ memuat nilai benar dan salah untuk setiap pernyataan-pernyataan komponennya, $\{[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)]\} = BSSS$.

Jadi, $p \wedge [q \wedge (p \vee q)]$ merupakan kontingensi.

Tanya:

Tunjukkan bahwa $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)$ adalah pernyataan majemuk yang kontingensi.

Jawab:

Perhatikan tabel berikut.

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$\neg r \vee \neg q$	$(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)$
B	B	B	S	S	S	S	S	B
B	B	S	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	B	S	S	B	B
B	S	S	S	B	B	S	B	B
S	B	B	B	S	S	B	S	S
S	B	S	B	S	B	B	B	B
S	S	B	B	B	S	S	B	B
S	S	S	B	B	B	S	B	B

Dari tabel di atas, terlihat bahwa nilai kebenaran $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)$ memuat nilai benar dan salah untuk setiap pernyataan-pernyataan komponennya, $\{[(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)]\} = BBBBSSBB$.

Jadi, $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)$ merupakan kontingensi.

ASAHI OTAK

TABEL KEBENARAN, EKVIVALENSI, TAUTOLOGI, KONTRADIKSI, DAN KONTINGENSI DARI PERNYATAAN MAJEMUK

Jawablah pertanyaan berikut.

1. Bagaimana nilai kebenaran dari tiap pernyataan majemuk berikut?
 - a. $(p \vee q) \Rightarrow \neg(p \wedge q)$
 - b. $p \Rightarrow \neg(p \vee q)$
 - c. $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow \neg p$
2. Termasuk tautologi, kontradiksi, atau kontingensi kah proposisi berikut?
 - a. $(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$
 - b. $((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
3. Tunjukkan bahwa pernyataan majemuk berikut merupakan tautologi.
 - a. $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
 - b. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)] \Rightarrow [p \Rightarrow r]$
4. Selidiki, apakah pernyataan majemuk berikut merupakan kontradiksi?
 - a. $(\neg q \wedge p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
 - b. $[(p \wedge q) \wedge r] \Rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
5. Buktikan bahwa:
 - a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee q$
 - b. $(\neg p \vee q) \vee \neg r \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee \neg r$

Notes

Sifat-sifat Aljabar Proposisi

Untuk setiap pernyataan p, q, r , tautologi B , dan kontradiksi S , selalu berlaku:

(1) Sifat Idempoten:

- i. $p \vee p \equiv p$
- ii. $p \wedge p \equiv p$

(2) Sifat Komutatif:

- i. $p \vee q \equiv q \vee p$
- ii. $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(3) Sifat Asosiatif:

- i. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- ii. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

(4) Sifat Distributif:

- i. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- ii. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(5) Sifat Identitas:

- i. $p \vee S \equiv p$
- ii. $p \wedge B \equiv p$
- iii. $p \vee B \equiv B$
- iv. $p \wedge S \equiv S$

(6) Sifat Komplemen:

- i. $p \vee \neg p \equiv B$
- ii. $p \wedge \neg p \equiv S$
- iii. $\neg(\neg p) \equiv p$
- iv. $\neg S \equiv B$ dan $\neg B \equiv S$

(7) Sifat de Morgan:

- i. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- ii. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

D. Invers, Konvers, dan Kontraposisi

1. Invers, Konvers, dan Kontraposisi

Implikasi : $p \Rightarrow q$

Invers : $\neg p \Rightarrow \neg q$

Konvers : $q \Rightarrow p$

Kontraposisi : $\neg q \Rightarrow \neg p$

Tabel kebenaran implikasi, invers, konvers, dan kontraposisi adalah sebagai berikut.

Sama							
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$q \Rightarrow p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
Sama							

Notes

Implikasi senilai dengan kontraposisi: $p \Rightarrow q = \neg q \Rightarrow \neg p$

Konvers senilai dengan invers: $q \Rightarrow p = \neg p \Rightarrow \neg q$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari setiap implikasi berikut.

- Jika persamaan $x^2 - 6x + 9 = 0$ mempunyai akar kembar maka ${}^3\log \frac{1}{27} = -3$.
- $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Jawab:

- Jika persamaan $x^2 - 6x + 9 = 0$ mempunyai akar kembar maka ${}^3\log \frac{1}{27} = -3$

Konvers : Jika ${}^3\log \frac{1}{27} = -3$ maka persamaan $x^2 - 6x + 9 = 0$ mempunyai akar kembar

Invers : Jika persamaan $x^2 - 6x + 9 = 0$ mempunyai akar kembar maka ${}^3\log \frac{1}{27} = -3$

Kontraposisi : Jika ${}^3\log \frac{1}{27} = -3$ maka persamaan $x^2 - 6x + 9 = 0$ mempunyai akar kembar

- $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Konvers : $q \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge p]$

Invers : $[(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \Rightarrow \neg p$

Kontraposisi : $\neg q \Rightarrow [(p \wedge \neg q) \vee \neg p]$

Jawablah pertanyaan berikut.

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi setiap pernyataan berikut.
 - a. Jika saya lulus SMA maka saya akan mendapatkan ijazah SMA.
 - b. Jika hari sudah gelap maka matahari tidak bersinar lagi.
 - c. Jika $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka $\sin x = \frac{1}{2}$.
 - d. Jika $\triangle ABC$ merupakan segitiga sama sisi maka panjang $AB = BC = AC$.
 - e. Jika Indonesia tidak terletak di benua Asia maka Indonesia bukan anggota ASEAN.
2. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari setiap pernyataan majemuk berikut.
 - a. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$
 - b. $(p \vee \sim q) \Rightarrow r$
 - c. $q \Rightarrow (\sim r \wedge \sim p)$
 - d. $(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim r \wedge s)$
 - e. $(\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
3. Bagaimana kalimat implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut?
 - a. p : Ani memiliki suara yang bagus
 q : Ani lolos audisi "Cipta Pesona"
 - b. p : Luas sebuah persegi adalah 144 cm^2
 q : Sisi sebuah persegi adalah 12 cm .
 - c. p : Indah belajar sungguh-sungguh
 q : Indah lulus ujian Matematika
4. Tentukan invers dari "Jika lampu mati maka ulangan ditangguhkan".
5. Tentukan konvers dari kalimat "Jika ia berasal dari Belanda maka ia berasal dari Eropa".
6. Tentukan kontraposisi dari pernyataan "Jika devisa negara bertambah maka pembangunan berjalan lancar".
7. Tentukan invers dari konvers "Jika saya tidak mengikuti upacara maka saya tidak memakai seragam sekolah".
8. Dapatkah kamu menuliskan kontraposisi dari konvers "Jika saya tidak mengikuti upacara maka saya tidak memakai seragam sekolah"?
9. Tentukan invers dari kontraposisi " $\sim(p \vee q) \Rightarrow p$ ".
10. Bagaimanakah invers dari konvers " $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$ "?

E. Penarikan Kesimpulan (Argumen)

Suatu argumen dikatakan sah atau valid jika dan hanya jika konjungsi dari premis-premisnya benar. Dengan kata lain, jika bentuk implikasi dari argumentasi tersebut merupakan suatu tautologi maka argumen tersebut dikatakan sah.

Modus Ponens

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{(premis 1)} \\ p & \text{(premis 2)} \\ \hline \therefore q & \text{(kesimpulan/konklusi)} \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{(premis 1)} \\ \neg q & \text{(premis 2)} \\ \hline \therefore \neg p & \text{(kesimpulan/konklusi)} \end{array}$$

Silogisme

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{(premis 1)} \\ q \Rightarrow r & \text{(premis 2)} \\ \hline \therefore p \Rightarrow r & \text{(kesimpulan/konklusi)} \end{array}$$

INFO MATEMATIKA



Metode penarikan kesimpulan adalah suatu cara untuk menarik kesimpulan dari beberapa premis yang benar. Metode ini digunakan untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan dengan cara menarik kesimpulan dari beberapa premis yang benar. Metode penarikan kesimpulan ini digunakan dalam berbagai bidang, seperti logika, matematika, dan ilmu komputer. Metode penarikan kesimpulan ini juga digunakan dalam kehidupan sehari-hari untuk mengambil keputusan berdasarkan informasi yang tersedia.

Salah satu metode penarikan kesimpulan yang paling umum digunakan adalah metode silogisme. Metode silogisme adalah metode penarikan kesimpulan yang menggunakan dua premis untuk menarik kesimpulan. Metode silogisme ini digunakan dalam berbagai bidang, seperti logika, matematika, dan ilmu komputer. Metode silogisme ini juga digunakan dalam kehidupan sehari-hari untuk mengambil keputusan berdasarkan informasi yang tersedia.

Contoh:

Selidikilah, sah atau tidaklah argumen berikut?

$$p \Rightarrow q$$

$$\neg r \Rightarrow \neg q$$

$$\therefore \neg r \Rightarrow \neg p$$

Jawab:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \Rightarrow q$	$\neg r \Rightarrow \neg q$	$\neg r \Rightarrow \neg p$
B	B	B	S	S	S	B	B	B
B	B	S	S	S	B	B	S	S
B	S	B	S	B	S	S	B	B
B	S	S	S	B	B	S	S	S
S	B	B	B	S	S	B	B	B
S	B	S	B	S	B	B	S	B
S	S	B	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B	B

Perhatikan baris 1, 5, 7 dan 8.

Premis 1: $p \Rightarrow q$ benar

Premis 2: $\neg r \Rightarrow \neg q$ benar

Konklusi: $\neg r \Rightarrow \neg p$ benar

Jadi, argumentasinya sah (**terbukti**).

Cara lain:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \Rightarrow q$	$\neg r \Rightarrow \neg q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q)]$	$\neg r \Rightarrow \neg p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg p)$
B	B	B	S	S	S	B	B	B	B	B
B	B	S	S	S	B	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	S	S	B	S	B	B
B	S	S	S	B	B	S	B	S	S	B
S	B	B	B	S	S	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	S	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B	B	B	B

Oleh karena $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg p)$ merupakan tautologi maka argumentasinya sah.

Cara lain:

$$p \Rightarrow q$$

$$\neg r \Rightarrow \neg q$$

$$\therefore \neg r \Rightarrow \neg p$$

$\neg r \Rightarrow \neg q$ ekuivalen dengan $q \Rightarrow r$ maka

$$p \Rightarrow q$$

$$q \Rightarrow r$$

$$\therefore p \Rightarrow r \quad (\text{sesuai silogisme})$$

Oleh karena $p \Rightarrow r$ ekuivalen dengan $\neg r \Rightarrow \neg p$ maka argumentasinya sah.

Tanya:

Bagaimanakah kesimpulan dari premis-premis berikut?

$$p \Rightarrow \neg q$$

$$q \vee r$$

$$\therefore \dots$$

Jawab:

$$p \Rightarrow \neg q$$

$$\neg q \Rightarrow r$$

(karena $q \vee r \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow r$)

$$\therefore p \Rightarrow r$$

Penarikan kesimpulan di atas sama dengan ilogisme maka argumentasinya sah.

Tanya:

Jika terdapat premis-premis berikut, bagaimanakah kesimpulannya?

Premis 1: Saya suka membaca atau adik suka bernyanyi

Premis 2: Adik saya tidak suka bernyanyi.

Kesimpulan: ...

Jawab:

Misalkan, p : Saya suka membaca, q : adik suka bernyanyi

maka premis 1 dapat ditulis sebagai $p \vee q$.

(karena $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ maka $\neg p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$)

Premis 1: $\neg p \Rightarrow q$

Premis 2: $\neg q$

Kesimpulan: $\neg(\neg p)$ atau p (gunakan metode modus Tollens)

Jadi, kesimpulannya: saya suka membaca.



MIKSE AKBINIKAH



Seekor rubah, ayam, dan setumpok biji gandum harus menyeberang melewati sungai yang alirannya sangat deras. Rubah dan ayam tadi tidak bisa berenang menyeberangi sungai, apalagi biji-biji gandum tadi, tentunya tidak dapat menyeberangi sungai dengan sendirinya.

Seseorang yang mengendarai motor boat memungkinkan mereka untuk menyeberang.

Sumber: CD-image

Tetapi, motor boat tersebut hanya bisa membawa dua penumpang saja termasuk orang tadi. Rubah tidak bisa diseberangkan bersamaan dengan ayam atau meninggalkan mereka berdua di tempat asalnya, karena rubah tadi akan memakan ayam tersebut. Begitu juga, jika ayam tersebut dibiarkan bersama biji-bijian gandum tadi maka ayam akan memakannya. Bagaimanakah caranya agar ketiganya dibawa dengan selamat ke seberang sungai?

ASAHI OTAK

PENARIKAN KESIMPULAN (ARGUMEN)

Jawablah pertanyaan berikut.

1. Bagaimanakah kesimpulan dari setiap argumen berikut?

- a. Premis 1: Jika saya datang maka dia senang
Premis 2: Dia tidak senang.

Kesimpulan: ...

- b. Premis 1: Adi tidak suka memancing atau Adi suka lari pagi.
Premis 2: Adi tidak suka lari pagi.

Kesimpulan: ...

- c. Premis 1: Jika saya mempunyai uang yang banyak maka saya akan membeli laptop.
Premis 2: Saya mempunyai uang yang banyak.

Kesimpulan: ...

- d. Premis 1: Jika pelayan tokonya ramah maka banyak pembeli yang datang ke toko itu.
Premis 2: Jika banyak pembeli yang datang ke toko itu maka toko itu akan sering memberi hadiah.

Kesimpulan: ...

- e. Premis 1: Jika saya pegawai maka saya akan mendapat gaji bulanan.
Premis 2: Jika saya mendapat gaji bulanan maka saya akan menabung setiap bulan.
Premis 3: Saya tidak menabung tiap bulan.

Kesimpulan: ...

- f. Premis 1: Jika bunga itu tidak berduri maka bunga itu bukan mawar.
Premis 2: Jika bunga itu berduri maka bunga itu harum baunya.
Premis 3: Bunga itu mawar.

Kesimpulan: ...

2. Menurutmu, sah atau tidakkah argumen-argumen berikut? Berikanlah alasannya.

- a. Premis(1): $p \vee q$
Premis(2): $\neg q$
Kesimpulan: p

- c. Premis(1): $p \vee q$
Premis(2): $p \rightarrow r$
Premis(3): $\neg r$
Kesimpulan: q

- b. Premis(1): $p \Rightarrow q$
Premis(2): $q \Rightarrow r$
Premis(3): p
Kesimpulan: r

- d. Premis(1): $\neg p \vee q$
Premis(2): $\neg r \vee \neg q$
Premis(3): p
Kesimpulan: r

**AL-FARABI** (870 - 950)

Ahli Logika dari Timur



Abu Nasr Mohammad Ibn al-Farakh al-Farabi atau lebih dikenal dengan nama Al-Farabi adalah salah satu filsafat atau ahli logika yang sangat berpengaruh. Ia lahir di desa kecil Wasij, dekat Farab di Turkistan. Ia lebih dikenal sebagai al-Fhrarabius di dunia barat. Ia menyelesaikan pendidikan dasarnya di Farab dan Bukhara tetapi ia melanjutkan pendidikannya yang lebih tinggi di Baghdad. Sebagai ilmuwan dan ahli filsafat, ia telah dikenal sebagai ahli berbagai cabang ilmu pengetahuan dan menguasai berbagai bahasa.

Kegigihan Al-Farabi dalam menuntut ilmu, telah membawanya ke Damaskus dan Mesir. Ia memiliki kontribusi yang besar dalam bidang sains, filsafat, logika, sosiologi, pengobatan, matematika, dan musik. Khusus dalam bidang logika, Al-Farabi memberikan kontribusinya dengan cara membuat pengajaran logika menjadi mudah, ia mengategorikan logika menjadi dua bagian, yaitu tahayul dan kenyataan.

Dengan otaknya yang cemerlang, Al-Farabi membuat terobosan untuk menggabungkan filsafat Platonik (ajaran filsafat yang dikemukakan oleh Plato) dan Aristotelian (ajaran filsafat yang dikemukakan oleh Aristoteles) dengan pengetahuan mengenai Alquran serta berbagai ilmu lainnya.

Beruntung Al-Farabi bisa menimba ilmu dari sejumlah guru yang sangat ahli di bidangnya. Ia belajar filsafat Aristoteles dan logika langsung dari seorang filosof termasyhur, Abu Bishr Matta Ibnu Yunus. Dalam waktu yang tak terlalu lama, kecemerlangan pemikiran Al-Farabi mampu mengatasi reputasi gurunya dalam bidang logika. Meskipun telah banyak buku dan hasil karyanya yang hilang. Namun, 117 telah diketahui dan 43 di antaranya adalah buku/hasil karya mengenai logika. Ia wafat pada usia 80 tahun dengan meninggalkan warisan ilmu yang sampai kini dipelajari oleh ahli filsafat lainnya.



Sumber: www.muslimphilosophy.com, <http://diploaui.wikitravel.org>,
www.farabimuseum.com



LET'S ACT

Dalam kehidupan sehari-hari, terkadang kalian dihadapkan pada suatu permasalahan yang secara tidak sadar permasalahan tersebut merupakan bagian dari logika matematika. Berikut disajikan beberapa permasalahan yang berkaitan dengan pokok bahasan yang telah kalian pelajari.

Petunjuk:

1. Selesaikan setiap permasalahan berikut secara individu selama 20 menit.
2. Buatlah 3 kelompok dengan menentukan satu orang sebagai ketua kelompok.
3. Diskusikan penyelesaian kalian untuk mengukuhkan penyelesaian yang telah diperoleh dari masing-masing anak (20 menit).
4. Setiap kelompok diberikan kesempatan untuk mempresentasikan penyelesaian dari satu permasalahan (misal kelompok 1 mempresentasikan permasalahan 1). Adapun kelompok lainnya diberikan kesempatan untuk membandingkan penyelesaian tersebut jika penyelesaian yang dipresentasikan tidak sama dengan penyelesaian kelompoknya atau kelompok yang lain mempunyai langkah yang berbeda dalam menyelesaikan persamaan tersebut (40 menit).

Permasalahan 1:

Jika dinyatakan "Pelamar harus memiliki ijazah SLTA atau yang sederajat" maka

- (1) Sarjana muda tidak boleh melamar
- (2) Peserta SMPTN boleh melamar
- (3) Sarjana tidak boleh melamar
- (4) Guru SLTA boleh melamar

Manakah pernyataan yang benar? Berikan alasannya.

Permasalahan 2:

Diketahui premis-premis berikut ini.

1. Jika saya punya uang maka saya akan membeli buku
2. Saya tidak membeli buku atau saya malas membaca
3. Saya tidak malas membaca.

Kesimpulan yang dapat ditarik dari ketiga premis tersebut adalah

Permasalahan 3:

Misalkan, Adi berjanji sama Ani, "Jika orang tua saya jadi ke luar negeri maka saya tidak jadi meminangmu". Adi ingkar janji apabila

- (1) Orang tua Adi tidak jadi ke luar negeri dan dia tidak jadi meminang Ani
- (2) Orang tua Adi tidak jadi ke luar negeri dan dia jadi meminang Ani
- (3) Orang tua Adi jadi ke luar negeri dan dia jadi meminang Ani
- (4) Orang tua Adi jadi ke luar negeri dan dia tidak jadi meminang Ani
- (5) Orang tua Adi tidak jadi ke luar negeri dan dia menikahi Ani

Manakah pernyataan yang benar dan berikan alasannya.

1. Pernyataan adalah kalimat yang memiliki nilai kebenaran (benar saja atau salah saja) tetapi tidak sekaligus benar dan salah. Pernyataan-pernyataan tunggal biasanya dilambangkan dengan huruf kecil, seperti p , q , r , dan sebagainya. Nilai kebenaran suatu pernyataan dapat ditulis menggunakan lambang huruf Yunani τ (dibaca tau).
2. Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat peubah atau variabel sehingga belum dapat ditentukan benar atau salahnya.
3. Negasi atau ingkaran merupakan penyangkalan dari suatu pernyataan. Negasi dari pernyataan p : $\sim p$ atau $\bar{p}$.
4. Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang terdiri lebih dari satu pernyataan. Pernyataan majemuk terdiri atas konjungsi, disjungsi, implikasi, dan bimplikasi.
5. Dua pernyataan yang dirangkai dengan kata penghubung "dan" untuk membentuk suatu pernyataan majemuk disebut konjungsi dari pernyataan semula. Konjungsi dilambangkan dengan " $\wedge$ " atau "&". Konjungsi bernilai benar, jika kedua pernyataan bernilai benar. Negasi dari konjungsi: $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$.
6. Dua pernyataan yang dirangkai dengan kata penghubung "atau" untuk membentuk suatu pernyataan majemuk disebut disjungsi dari pernyataan semula. Disjungsi dilambangkan dengan " $\vee$ ". Disjungsi bernilai salah jika kedua pernyataan bernilai salah. Negasi dari disjungsi: $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$.
7. Dua pernyataan yang dirangkai dengan kata penghubung "jika ... maka" untuk membentuk suatu pernyataan majemuk disebut implikasi. Implikasi dilambangkan dengan " $\Rightarrow$ ". Implikasi bernilai salah, jika pernyataan pertama benar dan pernyataan kedua salah. Negasi dari implikasi: $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$.
8. Pernyataan bersyarat berbentuk p jika dan hanya jika q disebut bimplikasi (implikasi dua arah). Pernyataan ini adalah gabungan dari $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$, karena itu disebut dengan implikasi dua arah. Bimplikasi dilambangkan dengan " $\Leftrightarrow$ ". Bimplikasi bernilai benar, jika kedua pernyataan bernilai benar atau kedua pernyataan bernilai salah. Negasi dari bimplikasi: $\sim(p \Leftrightarrow q) = p \Leftrightarrow \sim q \sim p \Leftrightarrow q$.
9. Tabel kebenaran adalah tabel yang digunakan untuk melihat hubungan antara nilai kebenaran pernyataan-pernyataan yang membentuknya.
10. Dua pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen jika memiliki nilai kebenaran yang sama.
11. Tautologi adalah sebuah pernyataan majemuk yang selalu benar untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya.

12. Kontradiksi adalah sebuah pernyataan majemuk yang selalu salah untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya.
13. Kontingensi adalah sebuah pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya memuat benar dan salah.
14. Implikasi senilai dengan kontraposisi:
 $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ dan konversi senilai dengan invers: $q \Rightarrow p \equiv \neg p \Rightarrow \neg q$.

15. Penarikan kesimpulan dikatakan sah jika sesuai dengan modus ponens, modus tollens, atau silogisme.

Modus ponens

$$p \Rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

Modus Tollens

$$p \Rightarrow q$$

$$\neg q$$

$$\therefore \neg p$$

Silogisme

$$p \Rightarrow q$$

$$q \Rightarrow r$$

$$\hline p \Rightarrow r$$

Ujilah pemahamanmu dengan mengerjakan Kuis 5 di halaman 334.

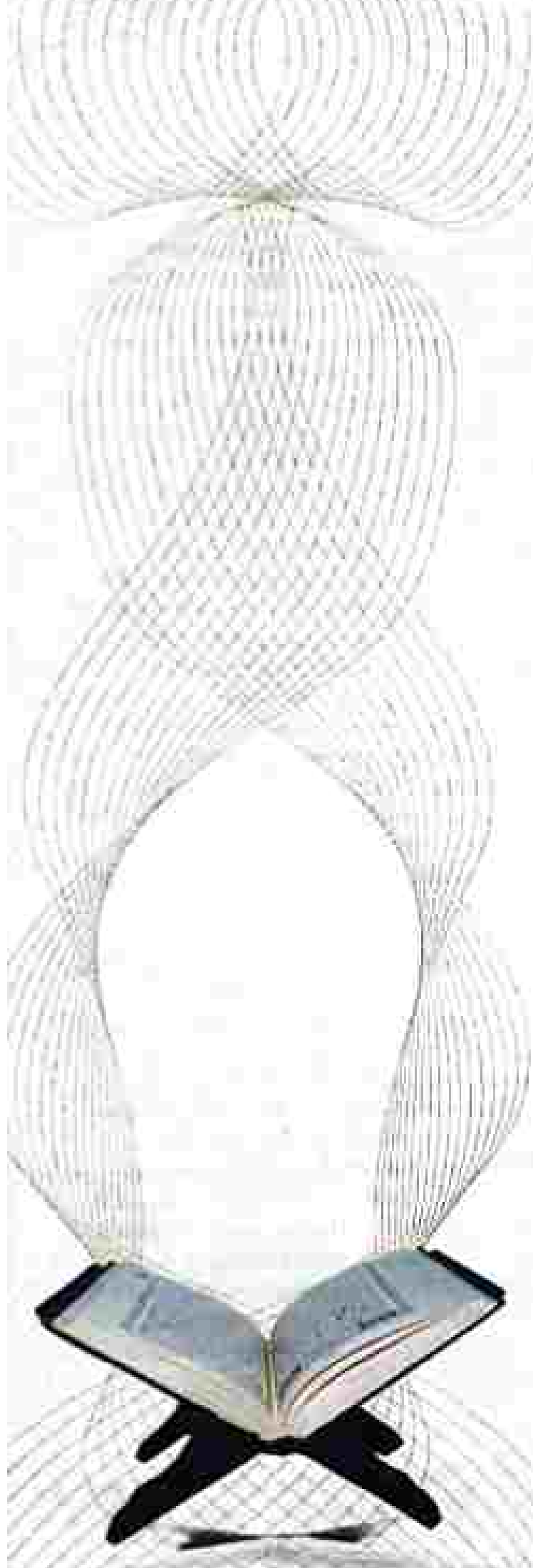
Muqadimah

Jika berbicara tentang manusia paripurna (insan kamil), yang harus dibicarakan adalah seorang individu yang mampu secara seimbang menghimpun di dalam dirinya tiga potensi manusia yang paling utama dan mendasar. Yaitu, orang yang kuat kadar keimanan dan kepercayaannya, yang tinggi sikap kepasrahan dan ketundukannya, serta yang elok perilaku kebajikan dan keluhuran akhlaknya. Inilah tiga hal paling prinsipil dari kategori manusia yang utama. Dalam bahasa yang sederhana, ditinjau dari unsur lahir maupun batin, ditinjau dari aspek humanitas maupun spiritualitas, semua puncak dari kategori di atas terdapat dalam pribadi Nabi Muhammad Saw. Sebab, beliau adalah khatam an-nabiyyin (penutup para nabi).

Karena itu, merupakan sebuah keniscayaan manakala kita berkeinginan untuk masuk dalam kategori orang-orang paripurna untuk mengikuti dan meneladani pribadi Rasulullah Saw. Sebab hanya dengan itulah satu-satunya cara yang memungkinkan kita bisa menjadi insan cendekia. Dalam Alquran surat Ali Imran ayat 31 yang berikut ini, "Katakan (Muhammad), jika kalian benar-benar mencintai Allah, maka ikutilah aku. Niscaya Allah akan mencintai kalian, dan mengampuni semua dosa kalian. Dan Allah Maha pengampun lagi Maha penyayang [Qul in kuntum tuhibbuna Allah, fa itabitu'ni. Yuhbibkum Allah wa yaghfir lakum zunubakum. Wa Allah ghafur rahim]." Dan sebagai garansi dari kualitas kepribadian Nabi Muhammad Saw, telah tercantum dalam surat al-Qalam ayat 4 berikut ini, "Dan sungguh dirimu itu mempunyai akhlak yang amat luhur [Wa innaka la 'ala khuluq 'azhim]."

Dengan demikian, yang menjadi kemestian buat kita adalah menentukan langkah-langkah sistematis dalam rangka dan upaya meneladani Rasulullah Saw. Sebab, sekali lagi dinyatakan di sini adanya sebuah pernyataan yang demikian gamblang dari Allah Swt. tentang keharusan meneladani pribadi Sang Nabi (*The Prophet*), sebagaimana yang terdapat dalam Alquran surat al-Ahzab ayat 21, "Sungguh ada pada diri Rasulullah itu teladan yang baik buat kalian semua, bagi orang-orang yang mengharap ridha Allah dan kebahagiaan hari akhir serta senantiasa berzikir kepada Allah [Laqad kana lakum fi rasulillah uswatun hasanah li man kana yarzu Allah wa al-yaumil akhir wa zakara Allah katsira]."

Karenanya, untuk bisa meneladani pribadi Rasulullah Saw, yang pertama harus dilakukan adalah mengetahui tujuan utama dari pengutusan (al-bi'tsah) Muhammad Saw. sebagai rasul Allah. Dalam kaitan ini, jelas dinyatakan Rasulullah Saw, bahwa motif utama pengutusan beliau adalah untuk menyempurnakan akhlak yang mulia [Innama bu'itsu li utammima makarima al-akhlaq].* Untuk bisa menunaikan visi dan misi ini, maka Rasulullah dibekali metodologi yang tepat oleh Allah Swt, dengan moda ajaran agama yang amat cenderung pada fitrah dan nurani asali manusia, serta penuh dengan sikap toleransi [Innama bu'itsu bi al-hanafiah as-samhah]. Bahkan di dalam Alquran surat al-Anbiya ayat 107, dengan amat gamblang Allah menyatakan bahwa tujuan pengutusan Nabi Muhammad adalah untuk menjadi rahmat bagi semesta raya [Wa maa arsalnaaka illa rahmatan li al-'alamin].



Lebih dari itu, yang harus dilakukan berikutnya adalah mendalami makna yang terdapat dari ajaran agama Islam. Ajaran agama Islam itu sendiri, sebagaimana yang telah dijelaskan di awal, mencakup tiga komponen yang utama. Yaitu, iman, Islam, dan ihsan, sebagaimana hadis yang disampaikan Bukhori-Muslim dari Umar Ibn Khattab.

Secara singkat, makna keimanan seorang individu terwujud dalam pemahaman yang komprehensif tentang Allah, dalam makna keagungan dan keindahan [*al-jalal wa al-jamal*], serta keabsolutan-Nya; pemahaman yang tepat tentang posisi dan peranan para malaikat; pemahaman yang akurat tentang muatan berbagai kitab yang diturunkan oleh Allah; pemahaman yang laik tentang fungsi dan kedudukan para utusan Allah; rasa kepercayaan yang mendalam tentang dahsyatnya hari akhir dan adanya perhitungan yang tidak akan meleset; serta ketentuan takdir bagi segala makhluk.

Sementara itu, makna keislaman seorang individu terwujudkan dalam aksi dan pemahamannya yang tulus dan penuh totalitas dalam penyaksian dirinya bahwa tiada tuhan selain Allah dan Muhammad adalah utusan-Nya; mendirikan shalat yang dapat berimplikasi pada kesalahan sosial; mengeluarkan zakat pada semua pihak yang berhak; menunaikan puasa dalam makna yang paling dasar; serta menjalankan ibadah haji, sebagai kombinasi tertinggi dari ibadah kemanusiaan. Dan makna dari manusia yang sejati adalah kesadaran diri dan jiwa setiap individu akan pengawasan (*al-muraqabah*) yang tiada akan pernah terputus dari Sang Mahatahu (*al-Khabir*), baik dalam bingkai ibadah maupun interaksi sosial, dengan sebuah keyakinan akan 'penglihatan' dari Sang Maha pencipta [*An ta'buda Allah ka annaka tarahu. Fa in lam tarahu, fa innahu yaraka*].

Wallah A'lam bi ash-Shawwab

6



Sumber : <http://www.kemendiknas.go.id>

MENELUSURI BELANTARA TRIGONOMETRI

Manfaat:

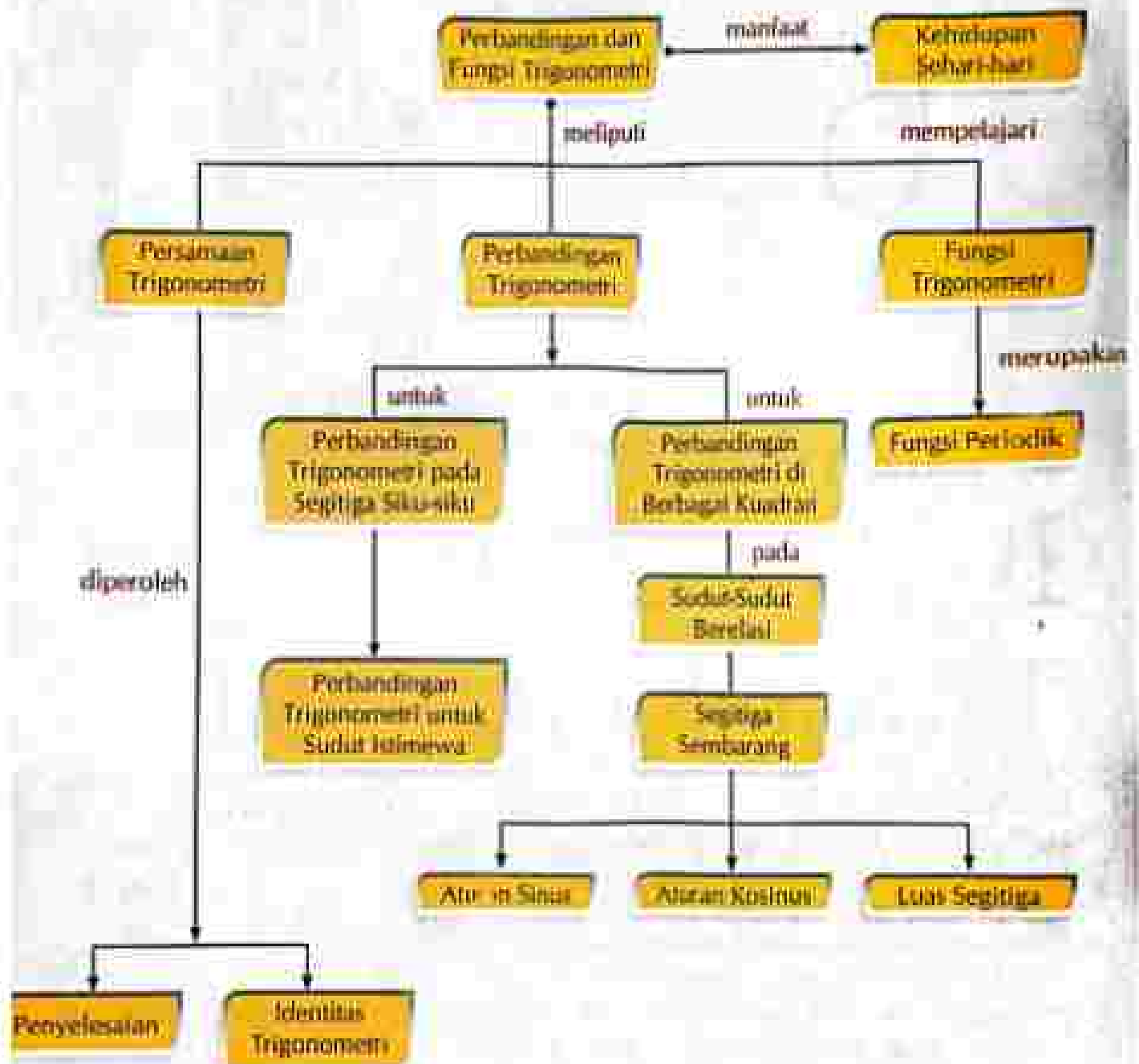
Mempelajari bab ini akan meningkatkan kemampuan matematis, analitis, dan spasialmu. Selain itu, kamu akan dapat mengukur ketinggian, panjang, atau jarak objek dengan menggunakan konsep trigonometri. Tentunya, kamu akan mampu menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan trigonometri.

Kata kunci: sinus, kosinus, dan tangen

Pernahkah kamu mengukur tinggi, panjang, atau ketebalan suatu benda dengan alat ukur? Pengukuran tersebut merupakan bentuk pengukuran secara langsung. Dalam situasi tertentu, pengukuran langsung akan sulit dan berbahaya. Untuk itulah dilakukan pengukuran secara tidak langsung. Pengukuran secara tidak langsung dapat dilakukan dengan menerapkan konsep trigonometri.

Tahukah kamu bagaimana melakukan pengukuran tidak langsung dengan menerapkan konsep trigonometri?

MIND MAP



A. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga

1. Sudut dan Pengukurannya

Pengukuran sudut yang dilakukan mempunyai dua satuan pengukuran, yaitu derajat dan radian (penulisan radian biasa disingkat rad).

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ atau } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Bagaimana menyatakan bentuk derajat berikut ke dalam radian?

- a. 60° b. $(-120)^\circ$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } 60^\circ &= 60 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ &= 1,047 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (-120)^\circ &= -120^\circ \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} \\ &= -\frac{2}{3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Tanya:

Bagaimana menyatakan bentuk radian berikut ke dalam derajat?

- a. $\frac{1}{2} \pi \text{ rad}$ b. 2 rad

Jawab:

$$\text{a. } \frac{1}{2} \pi \text{ rad} = \frac{1}{2} \pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 2 \text{ rad} &= 2 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \left(\frac{360}{\pi} \right)^\circ \\ &= \left(\frac{360}{3,14} \right)^\circ = 114,65^\circ \end{aligned}$$

ASAHI OTAK SUDUT DAN PENGUKURANNYA

1. Nyatakan setiap bentuk berikut dalam radian.

- a. 45° c. 120° e. 225°
b. $32,5^\circ$ d. 15° f. $(-90)^\circ$

2. Nyatakan setiap bentuk berikut dalam derajat.

- a. $\frac{1}{3} \pi \text{ rad}$ c. $3\pi \text{ rad}$ e. 4 rad
b. $\frac{2}{3} \pi \text{ rad}$ d. $\frac{3}{4} \text{ rad}$ f. 7 rad

Mengkonversi Nilai Radian dan Derajat dengan Menggunakan Kalkulator Ilmiah

Mengkonversi Derajat ke dalam Radian

Contohnya, kita akan menentukan hasil pada Tanya & Jawab halaman 43 dengan menggunakan kalkulator ilmiah.

- Nyatakan 60 ke dalam radian.

Tekan **MODE** **MODE**, pilih/tekan **2** untuk memilih mode rad (radian). Tekan

0 **0** **SHIFT** **DRG**, Pilih/tekan **3** untuk memilih satuan *degree* (derajat) bagi

60. Kemudian, tekan **=**. Anda akan mendapatkan hasil 1,047 pada layar.

Ini berarti, $60 = 1,047 \text{ rad}$.

Mengkonversi Radian ke dalam Derajat

Contohnya, kita akan menentukan hasil pada Tanya & Jawab halaman 43 dengan menggunakan kalkulator ilmiah.

- Nyatakan $\frac{1}{2}\pi$ ke dalam radian.

Tekan **2** **(1/2)**, pilih/tekan **2** untuk memilih mode rad (radian). Tekan

0 **.** **5** **SHIFT** **π** **SHIFT** **DRG**, Pilih/tekan **3** untuk memilih satuan

rad(radian) bagi $\frac{1}{2}\pi$. Kemudian, tekan **=**. Anda akan mendapatkan hasil 90 pada layar.

Ini berarti, $\frac{1}{2}\pi = 90^\circ$.

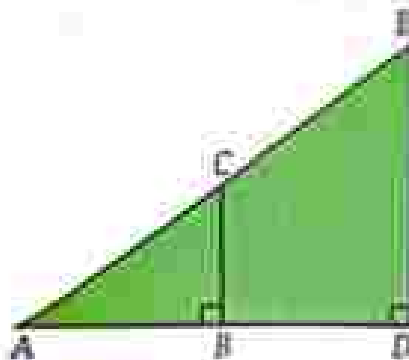


2. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga Siku-siku

Sebelumnya, kamu telah mengetahui bahwa pengukuran secara tidak langsung dapat dilakukan dengan menggunakan konsep trigonometri.

Pengukuran tidak langsung dengan trigonometri dapat digunakan untuk mengukur jarak dan tinggi. Pengukuran tidak langsung banyak dilakukan pada bidang penerbangan, medis, sains, dan masih banyak yang lainnya. Penggunaan trigonometri dalam pengukuran yaitu dengan mengubah objek yang akan diukur menjadi bangun segitiga (lebih mudah jika segitiga tersebut siku-siku).

Gambar berikut menunjukkan dua buah segitiga yang kongruen yaitu $\triangle ABC$ dan $\triangle ADE$.

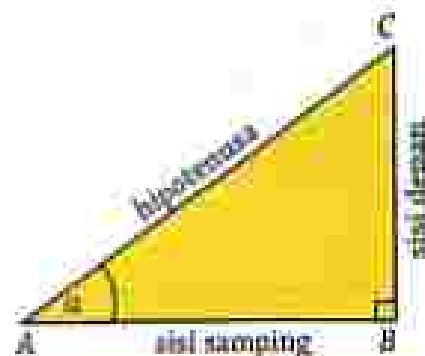


Panjang AB , AC , BC , AD , AE , dan DE mempunyai perbandingan:

$$a. \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \quad c. \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

$$b. \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$$

Segitiga siku-siku ABC mempunyai dua sisi yang saling tegak lurus dan satu sisi terpanjang (hipotenusa). Pada gambar berikut, segitiga ABC siku-siku di C dan α adalah sudut di titik A .



Jika sisi $AB = c$, $BC = a$, dan $AC = b$ maka perbandingan trigonometri suatu sudut pada segitiga tersebut adalah sebagai berikut.

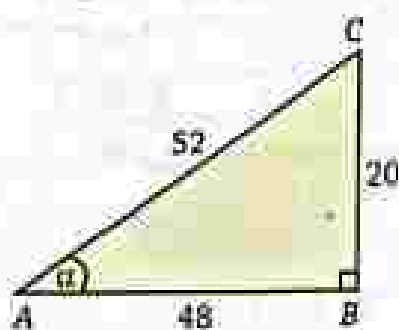
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{b}{c} \\ \tan \alpha &= \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Notes

Selain $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, dan $\tan \alpha$ terdapat $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$; $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$. Karenanya, nilai perbandingan di atas dikenal dengan nama nilai perbandingan trigonometri pada segitiga.

Tanya:

Berapakah nilai $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, dan $\tan \alpha$ pada gambar berikut?



Jawab:

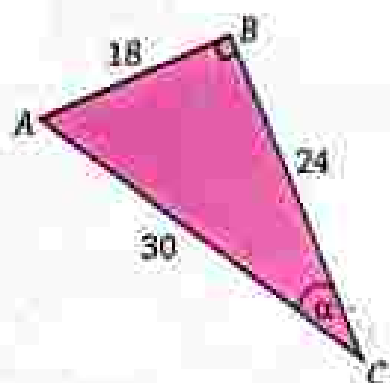
$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

Tanya:

Berapakah nilai $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, dan $\tan \alpha$ pada $\triangle ABC$ berikut?



Jawab:

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Tanya:

Tentukan nilai x pada gambar berikut (gunakan kalkulator).

Jawab:



Pada gambar, terlihat bahwa perbandingan x berbanding 9 sama dengan cosinus sudut yang terbentuk antara garis dengan panjang x dan 9. Dengan demikian,

$$\cos 59^\circ = \frac{x}{9}$$

$$x = 9 \cos 59^\circ \quad (\cos 59^\circ \approx 0,5150 \leftarrow \text{gunakan kalkulator})$$

$$x = 9 (0,5150) = 4,6353 \approx 4,6$$

Jadi, nilai $x = 4,6$.

LET'S DO IT!

Dapatkan kalian mencari nilai $\sec \alpha$, $\csc \alpha$, dan $\cot \alpha$ dari Tanya & Jawab di atas?

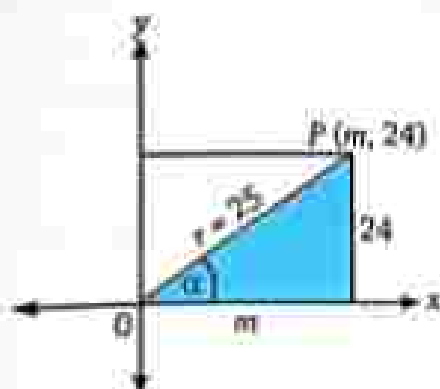


TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui titik $P(m, 24)$. Jarak titik P ke $O(0, 0)$ sama dengan 25. Jika α adalah sudut yang dibentuk OP dengan sumbu x positif, berapakah nilai $\sec \alpha$?

Jawab:



$$r = \sqrt{m^2 + 24^2}$$

Kuadratkan kedua ruas sehingga didapat

$$25^2 = m^2 + 24^2$$

$$m^2 = 25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49$$

$$m = 7$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{25}{7}$$

$$\text{Jadi, nilai } \sec \alpha = \frac{25}{7}$$

LET'S DO IT

Dengan menggunakan dalil Pythagoras, dapatkah kamu menentukan nilai m pada Tanya & Jawab di atas?



AMAZING PERSON



ULUGH BERG (1393-1449)

Matematikawan dari Iran

Ulugh Berg adalah salah satu matematikawan yang dilahirkan pada tahun 1393 di Timurid, Persia (sekarang Iran). Beliau meninggal pada tanggal 27 Oktober 1449 di Samarkand, Timurid. Pada masanya, Ulugh Berg berhasil menemukan nilai $\sin 1$ dengan tingkat akurasi (ketelitian) sangat tinggi. Beliau menyatakan bahwa:

$$\sin 1 = 0,017452406437283571$$

Jika dibandingkan dengan perhitungan sekarang:

$$\sin 1 = 0,017452406437283512820$$

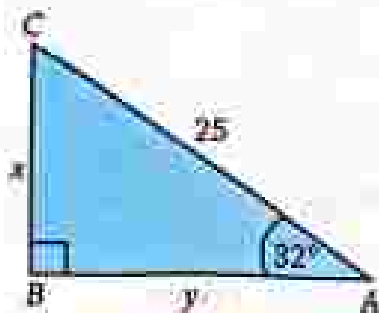
Terlihat bahwa hasil yang diperoleh oleh Ulugh Berg, benar sampai 16 angka di belakang koma.

Sumber: <http://www.kemang.com.au/ulughberg.html>

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berdasarkan gambar berikut, berapakah nilai x dan y pada segitiga tersebut?



Jawab:

$$\cos BAC = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 32^\circ = \frac{y}{25}$$

$$y = 25 \cos 32^\circ \quad (\text{gunakan kalkulator untuk mencari } \cos 32^\circ)$$

$$= 21,20$$

Jadi, nilai $y = 21,20$.

Setelah memperoleh y , nilai x dapat diperoleh dengan 3 cara, yaitu

Cara 1:

$$\sin 32^\circ = \frac{x}{25}$$

$$x = 25 \sin 32^\circ$$

$$= 13,25$$

Cara 2:

$$\tan 32^\circ = \frac{x}{y} = \frac{x}{21,20}$$

$$x = 21,20 \tan 32^\circ$$

$$= 13,25$$

LET'S DO IT

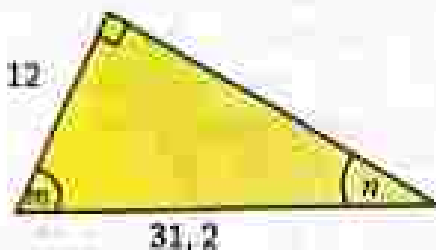
Cara yang ketiga untuk menentukan nilai x dan y pada Tanya & Jawab di atas adalah dengan menggunakan dalil Pythagoras. Dapatkah kalian menentukannya?



TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan nilai m dan n pada segitiga berikut.



Jawab:

$$\sin n = \frac{12}{31,2}$$

$$n = 22,62^\circ$$

(gunakan kalkulator)

Nilai m dapat ditentukan dengan menggunakan konsep jumlah sudut suatu segitiga.

Karena jumlah sudut-sudut dalam suatu segitiga adalah 180° maka

$$m = 180^\circ - 90^\circ - 22,62^\circ = 67,38^\circ$$

Jadi, nilai $n = 22,62^\circ$ dan $m = 67,38^\circ$.

INFO MATEMATIKA

Cara Menentukan Nilai dan Sudut yang Belum Diketahui pada Segitiga dengan Menggunakan Microsoft Excel

Banyak cara yang dapat kamu gunakan untuk mempermudah menentukan nilai yang belum diketahui pada suatu segitiga. Salah satunya dengan menggunakan program Microsoft Excel. Bagi kamu yang kurang mengerti program Excel, kamu dapat mengunduh *software*-nya secara gratis di internet. Ikuti langkah-langkah berikut.

Langkah ke-1: Buka *Internet explorer*, kemudian ketik <http://www.swin.edu/8082/mcenter/calculators.htm>



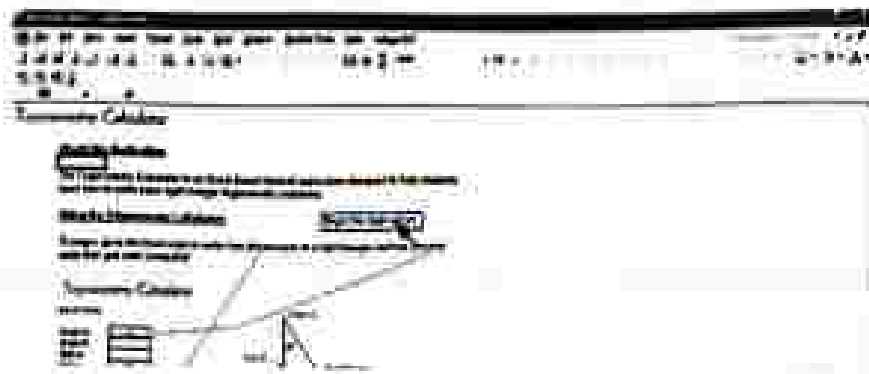
Klik ikon "Note" untuk login dan isi form. Kemudian, kembali ke halaman sebelumnya.

Langkah 2: Klik ikon *calculator* pada layar, sehingga akan tampil layar sebagai berikut.



Isilah formulir tersebut. Kemudian, klik **"Submit"**, sehingga tampil layar seperti di sebelah kanan. Klik **Trig Calculator**, sehingga akan muncul tampilan kotak kecil seperti pada sebelah kanan. Pilih **"Open with"** lalu klik **"OK"**. Komputer otomatis akan mendownload program tersebut.

Langkah 3: Setelah proses *download* selesai, Microsoft Excel akan terbuka dengan tampilan sebagai berikut.



Pelajari instruksi (petunjuk kerja) pada layar, minta bantuan guru/temanmu jika kamu tidak mengerti. Kemudian, Klik tombol **"Begin Application"** untuk memulai.

Langkah 4: Masukkan nilai-nilai pada tabel sesuai soal/permasalahan yang ada. Misalnya, kamu ingin mengetahui hasil pada **Tanya & Jawab** pada halaman 46 dengan menggunakan *software* ini. Isi tabel input data dengan nilai-nilai yang sesuai. Dari gambar, tampak **Angle A** (sudut A) = 59, **Side b** (sisi b) = x , dan **hypotenuse** (sisi miring) = 9. Klik **"See the Solution"** untuk mengetahui jawabannya.

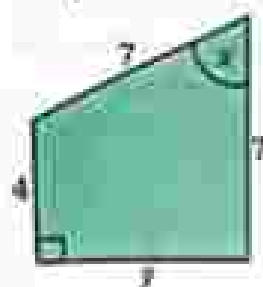
Jika kamu mengerjakannya dengan benar, kamu akan mendapatkan nilai yang sama dengan jawaban pada buku, yaitu: 4.6353 atau 4.6.

Sekarang, coba kamu tentukan hasil pada **Tanya & Jawab** pada halaman 48 dengan menggunakan program ini.

TANYA & JAWAB

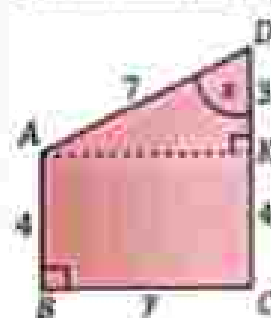
Tanya:

Berapakah nilai x dan y pada bangun datar berikut?



Jawab:

Berilah nama untuk gambar di atas, misalnya segi empat ABCD.



$$DK = 7 - 4 = 3 \text{ dan } AK = BC = y$$

Pada $\triangle ADK$:

$$\cos x = \frac{DK}{DA} = \frac{3}{7}$$

$$x = 64,62^\circ \quad (\text{gunakan kalkulator untuk mencari } x)$$

$$\tan 64,62^\circ = \frac{AK}{DK} = \frac{y}{3}$$

$$y = 3 \tan 64,62^\circ = 6,324$$

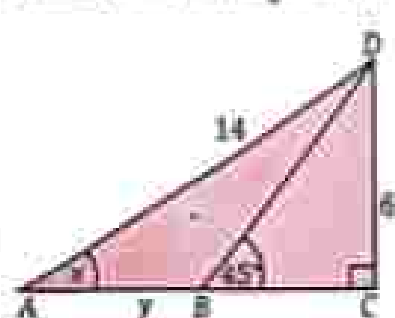
Jadi, nilai x adalah $64,62^\circ$ dan nilai y adalah 6,324.

Tanya:

Jika diketahui segitiga berikut, berapakah nilai x dan y ?

Jawab:

Berilah nama untuk gambar tersebut, misalnya segitiga ACD.



$$\sin x = \frac{CD}{AD} = \frac{6}{14}$$

$$x = 25,38^\circ \quad (\text{gunakan kalkulator untuk mencari } x)$$

Pada segitiga BCD:

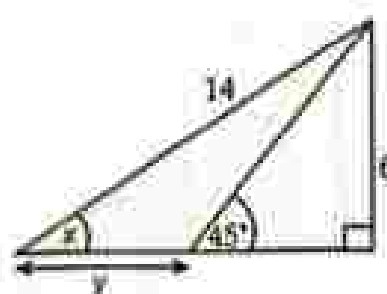
$$\tan 45^\circ = \frac{CD}{BC} = \frac{6}{BC} \text{ maka } BC = \frac{6}{\tan 45^\circ} = 6$$

Pada segitiga ACD:

$$14^2 = AC^2 + 6^2 \quad (\text{dari Pythagoras})$$

$$AC^2 = 14^2 - 6^2 = 160 \text{ maka } AC = \sqrt{160} = 12,649 \quad (\text{ambil 3 digit})$$

$$\text{Jadi, } y = AC - BC = 12,649 - 6 = 6,649$$



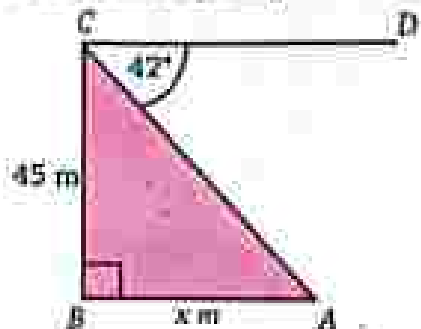
TANYA & JAWAB

Tanya:

Dari sebuah jendela pada suatu gedung bertingkat, Ajeng melihat sebuah mobil sedang diparkir di sebuah halaman pertokoan dengan sudut depresi sebesar 42° . Berapakah jarak mobil tersebut dengan gedung jika tinggi Ajeng melihat mobil adalah 45 m dari tanah?

Jawab:

Soal di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



$$\angle ACB = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$$

$$\tan 48^\circ = \frac{x}{45}$$

$$x = 45 \tan 48^\circ$$

$$x = 49,98 \text{ (ambil 2 digit)}$$

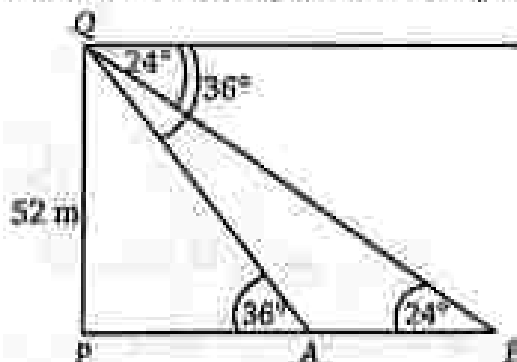
Jadi, jarak mobil dengan gedung adalah 49,98 meter.

Tanya:

Dari sebuah menara setinggi 52 m, seorang penjaga pantai melihat dua buah kapal dengan sudut depresi 36° dan 24° . Dapatkah kamu menentukan jarak kedua kapal tersebut?

Jawab:

Soal di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



$$\text{Dari segitiga PAQ, } \tan 36^\circ = \frac{PQ}{PA} = \frac{52}{PA}$$

$$PA = \frac{52}{\tan 36^\circ} = 71,57 \text{ m}$$

$$\text{Dari segitiga PBQ, } \tan 24^\circ = \frac{PQ}{PB} = \frac{52}{PB}$$

$$PB = \frac{52}{\tan 24^\circ} = 116,79 \text{ m}$$

$$AB = PB - PA = 116,79 - 71,57 = 45,22 \text{ m.}$$

Jadi, jarak kedua kapal 45,22 m.

LET'S DO IT

Apa yang dimaksud dengan sudut depresi dan sudut elevasi?





TAKE A BREAK

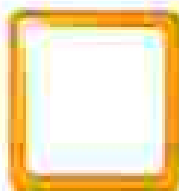
Ia merupakan matematikawan yang memberikan kontribusi besar dalam bidang trigonometri. Salah satunya dengan membuat tabel sinus dan kosinus. Ia mampu mengukur jarak antar kota bahkan bintang dengan menerapkan konsep trigonometri. Siapakah Ia? Untuk mengetahuinya, kerjakanlah soal di bawah ini dengan mencocokkan panjang sisi segitiga yang ditanyakan.



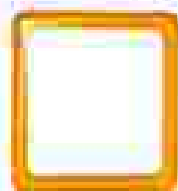
Berkas soal di atas



15,893 cm



15,701 cm



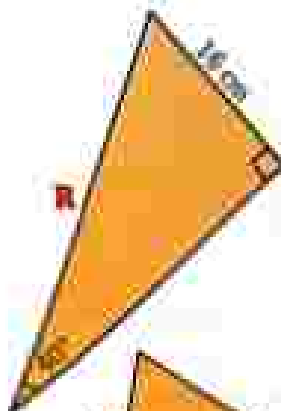
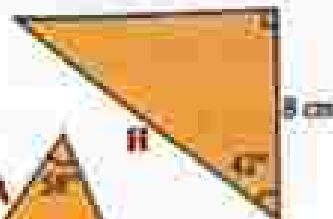
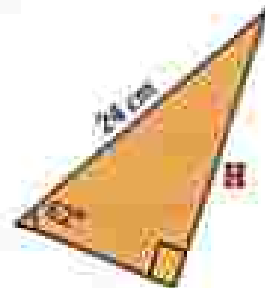
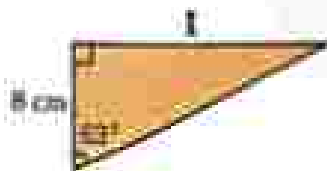
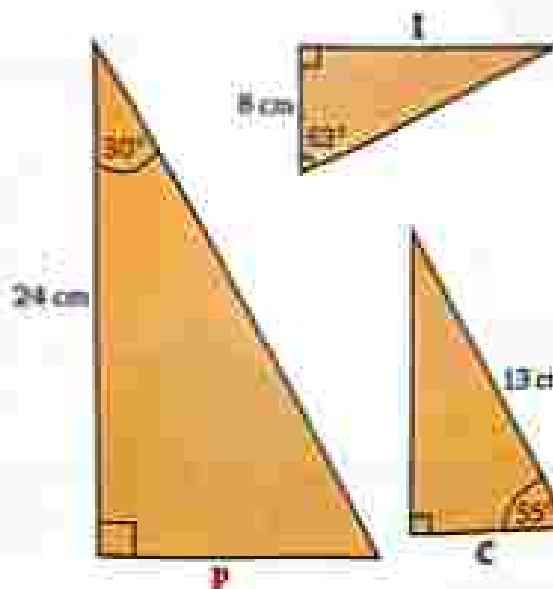
13,856 cm



26,110 cm



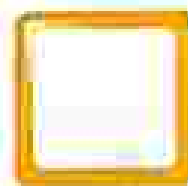
5,999 cm



24,892 cm



7,456 cm



10,765 cm



1,822 cm

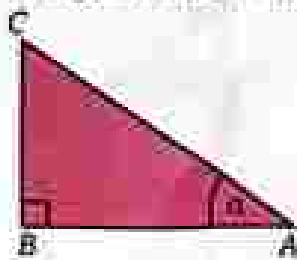


26,441 cm

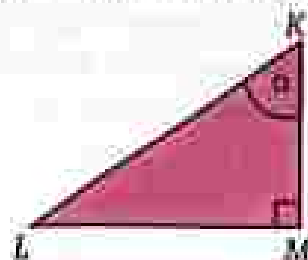
ASAHI OTAK

PERBANDINGAN TRIGONOMETRI SUATU SUDUT PADA SUATU SEGITIGA SIKU-SIKU

1. Dari gambar-gambar berikut, tentukan sisi samping, sisi depan, dan sisi miringnya.



(a)

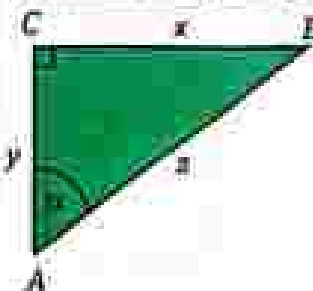


(b)

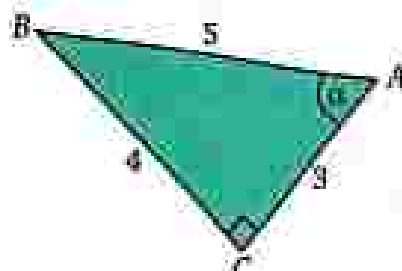


(c)

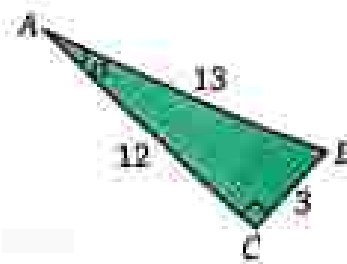
2. Tentukan enam nilai perbandingan trigonometri sudut dari tiap segitiga berikut.



(a)



(b)



(c)

3. Berapakah nilai x dan y dari tiap segitiga berikut? (gunakan kalkulator).



(a)

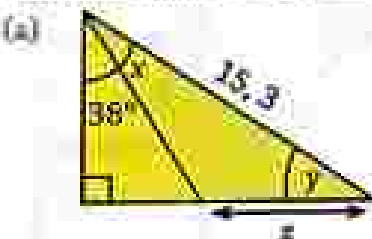


(b)

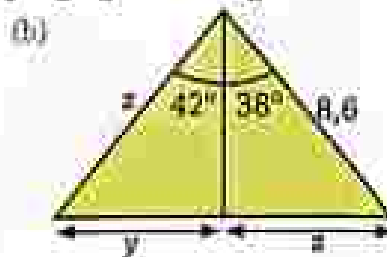


(c)

4. Tentukan nilai x dan y , dan z dari tiap segitiga berikut (gunakan kalkulator).



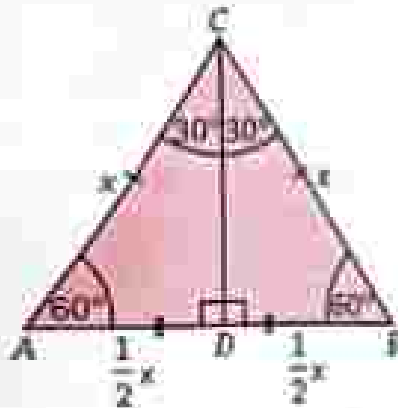
(a)



(b)

5. Dua orang anak melihat puncak gedung bertingkat dengan sudut elevasi masing-masing 63° dan 56° . Jika jarak kedua anak tersebut adalah 20 m, berapakah tinggi gedung tersebut?
6. Tinggi sebuah pohon sama dengan x m. Ajeng melihat puncak pohon dengan sudut elevasi 23° . Di sisi lain, Dimas berjarak 10 m dari Ajeng dan terletak satu garis dengan pohon. Jika Ajeng melihat puncak pohon dengan sudut elevasi 32° , dapatkan kamu menentukan jarak antara Dimas dengan pohon?
7. Dari sebuah gedung bertingkat, Ajeng melihat dua buah mobil yang tengah diparkir dari ketinggian 72 m dengan sudut elevasi masing-masing 43° dan 54° . Tentukan jarak kedua mobil tersebut.

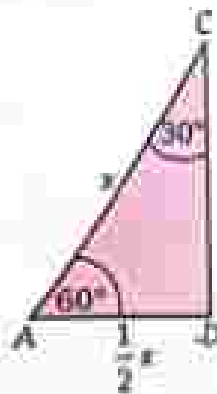
3. Nilai Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa



Beberapa sudut istimewa dapat kita tentukan nilai perbandingan trigonometrinya. Sudut-sudut tersebut adalah 0° , 30° , 45° , 60° , dan 90° . Untuk menentukan nilai perbandingannya, perhatikan $\triangle ABC$ sama sisi dengan panjang x satuan di samping.

$\triangle ADC$ dan $\triangle BDC$ merupakan segitiga siku-siku di D .

Jika kita lihat salah satu segitiga tersebut, misalnya $\triangle ADC$ maka



$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{3}{4}x^2 \rightarrow CD = \frac{1}{2}\sqrt{3}x$$

$$\sin 60^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}x}{x} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \cos 60^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{dan } \tan 60^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}x}{\frac{1}{2}x} = \sqrt{3}$$

Dengan metode yang sama maka sudut-sudut istimewa yang lain dapat ditentukan.

Tabel 6.1 Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa

	α				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\sec \alpha$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-
$\csc \alpha$	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
$\cot \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1



JAWABING PERSOALAN



AL-BUZJANI (940-997/998)

Matematikawan Ahli Trigonometri

Abul Wafa Muhammad Ibn Muhammad Ibn Yahya Ibn Ismail al-Buzjani dilahirkan di Buzjan, Nishapur pada tahun 940. Beliau meninggal di Baghdad pada tahun 997/998. Beliau yang pertama kali menunjukkan hubungan sinus dalam sebuah segitiga. Beliau menyusun tabel trigonometri dan menyatakan nilai $\sin 30^\circ$ dengan akurat hingga 8 angka di belakang koma.

Kontribusi lain dalam trigonometri adalah hubungan $\sin (a + b)$ dan rumus:

$$2 \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) = 1 - \cos a \text{ dan}$$

$$\sin a = 2 \sin \left(\frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{a}{2} \right)$$

Sumber: <http://www.prima-indonesia.com>

TANYA & JAWAB

Tanya:

Pada $\triangle ABC$, diketahui $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, dan $AB = 15$. Dapatkah kamu menentukan panjang BC ?

Jawab:



$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{15}$$

$$BC = 15 \tan 60^\circ$$

$$= 15\sqrt{3}$$

Jadi, panjang BC adalah $15\sqrt{3}$.

Tanya:

Tentukan nilai dari

$$\frac{\sin 30^\circ - \tan 60^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 60^\circ - \sin 45^\circ + \cos 45^\circ}$$

Jawab:

$$\frac{\sin 30^\circ - \tan 60^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 60^\circ - \sin 45^\circ + \cos 45^\circ} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad (\text{rasionalkan})$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - 1$$



TAKE A BREAK

Seorang anak baru keluar dari hutan dan ingin kembali ke rumahnya. Akan tetapi, ia hanya dapat sampai ke rumah jika dapat melewati bulatan-bulatan yang tersedia. Anak tersebut dapat sampai di rumahnya dengan syarat jika bulatan yang dilewati mempunyai nilai dari yang terkecil sampai yang terbesar atau sebaliknya.

hutan



anak



Rumah: 100m dari hutan

Cara bermain:

- Bagilah kelas menjadi beberapa kelompok dengan setiap kelompok terdiri atas 6 orang.
- Setiap kelompok mendiskusikan banyaknya cara anak tersebut dapat kembali ke rumahnya.
- Tentukan cara tercepat agar anak tersebut dapat sampai ke rumahnya.



LET'S ACT

Dalam kehidupan sehari-hari, kalian mungkin pernah menemui permasalahan yang sebenarnya dapat diselesaikan dengan perbandingan trigonometri. Berikut disajikan beberapa permasalahan yang berkaitan dengan pokok bahasan yang telah kalian pelajari.

Petunjuk:

1. Buatlah 3 kelompok dengan menentukan satu orang sebagai ketua kelompok dan masing-masing kelompok harus menyediakan alat ukur (penggaris, busur, meteran, dan alat hitung).
2. Diberikan tiga objek di sekitar kalian yang akan dicari tingginya oleh masing-masing kelompok secara bergiliran.
3. Misalkan, objek tersebut adalah tiang listrik, pohon kelapa, dan pohon mangga.
4. Diskusikan hasil yang diperoleh masing-masing kelompok.

Permasalahan 1:

Tentukan tinggi tiang listrik yang ada di sekitar kalian.

Permasalahan 2:

Tentukan tinggi pohon kelapa yang ada di sekitar kalian.

Permasalahan 3:

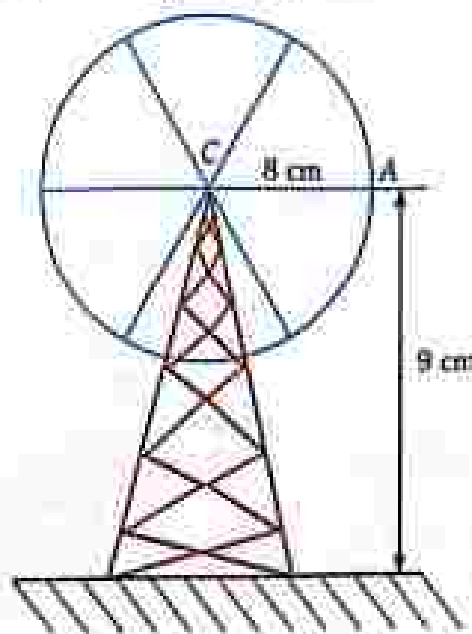
Tentukan tinggi pohon mangga yang ada di sekitar kalian.

ASAHI OTAK

NILAI TRIGONOMETRI UNTUK SUDUT-SUDUT ISTIMEWA

Jawablah pertanyaan berikut.

1. Jika $\sin A = 0,5$ dengan A lancip, berapakah $\tan A$?
2. Segitiga ABC adalah memiliki $\angle A = 90^\circ$. Jika $AD \perp BC$ dan $DC = 4$ cm, $BD = 9$ cm, tentukan panjang AD .
3. Tentukan nilai dari:
 - a. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$
 - b. $\frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$
 - c. $2 \sin \frac{1}{6} \pi \cos \frac{1}{6} \pi$
 - d. $\frac{\sin^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}$
4. Sebuah tangga yang panjangnya 2 m disandarkan ke bagian paling atas sebuah tembok. Jika tinggi tembok = $\sqrt{3}$ m, tentukan sudut yang terbentuk antara tangga dengan lantai.
5. Perhatikan gambar berikut.

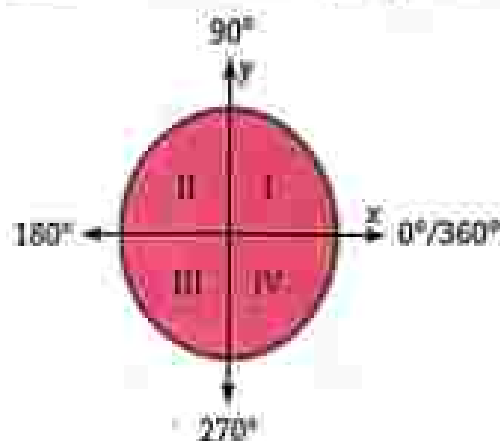


Titik A terletak pada lingkaran besar yang berpusat di C . Jarak A dan $C = 8$ m dan titik C berada 9 m di atas tanah. Pada saat permulaan, tinggi A dan C sama. Jika titik A berputar sejauh 30° (berlawanan arah jarum jam) dari posisi awal, tentukan tinggi A dari tanah.

B. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut di Berbagai Kuadran

1. Nilai Trigonometri di Berbagai Kuadran

Dengan menggunakan koordinat carterius, sudut dapat dikelompokkan menjadi 4 bagian yang selanjutnya disebut dengan kuadran. Letak kuadran dapat diperlihatkan pada gambar berikut.



Kuadran I:

Daerah yang dibatasi oleh sumbu x positif dan sumbu y positif.

Kuadran II:

Daerah yang dibatasi oleh sumbu x negatif dan sumbu y positif.

Kuadran III:

Daerah yang dibatasi oleh sumbu x negatif dan sumbu y negatif.

Kuadran IV:

Daerah yang dibatasi oleh sumbu x positif dan sumbu y negatif.

Adapun nilai dari perbandingan trigonometri di empat kuadran adalah sebagai berikut.

1. Di kuadran I, nilai $\sin$, $\cos$, dan $\tan$ semuanya positif.
2. Di kuadran II, nilai $\sin$ positif, nilai $\cos$ dan $\tan$ negatif.
3. Di kuadran III, nilai $\tan$ positif, nilai $\sin$ dan $\cos$ negatif.
4. Di kuadran IV, nilai $\cos$ positif, nilai $\sin$ dan $\tan$ negatif.

Notes

Jika kamu merasa kesulitan mengingatnya, gunakanlah kata "**SOH CAH TOH**". Di kuadran I, **S**in (semua) positif, di kuadran II, hanya **C**os yang positif. Adapun di kuadran III, hanya **T**an yang positif, dan di kuadran IV hanya **C**os yang positif. Mudah kan mengingatnya?

LET'S DO IT

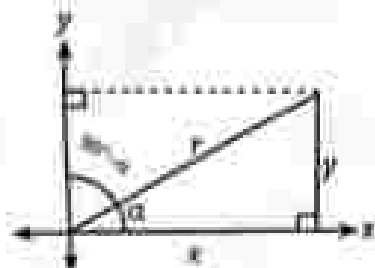
Coba kamu cari informasi mengenai pengertian kuadran selain yang telah dipelajari. Apakah jumlah kuadran hanya ada 4? Jelaskan.



2. Sudut-Sudut Berelasi

Di dalam trigonometri, terdapat sudut yang mempunyai nilai trigonometri sama atau tandanya berbeda.

Misalkan, $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $\cos 150^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$



Secara umum, setiap satu sudut lancip memiliki pasangan (relasi) dengan sudut yang lain di kuadran II, III, atau IV. Untuk menentukan relasi sudut-sudut tersebut.

Perhatikan gambar di samping.

Dari gambar diketahui:

Sudut α	Sudut $90^\circ - \alpha$	Relasi α dan $(90^\circ - \alpha)$
$\sin \alpha = \frac{y}{r}$	$\sin (90^\circ - \alpha) = \frac{x}{r}$	$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\cos \alpha = \frac{x}{r}$	$\cos (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$	$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\tan \alpha = \frac{y}{x}$	$\tan (90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y}$	$\tan (90^\circ - \alpha) = \text{ctg } \alpha$
$\text{ctg } \alpha = \frac{x}{y}$	$\text{ctg } (90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$	$\text{ctg } (90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$

Dengan langkah yang sama, relasi-relasi untuk sudut yang lain adalah sebagai berikut.

Relasi α dan $(90^\circ + \alpha)$

$$\begin{aligned}\sin (90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos (90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan (90^\circ + \alpha) &= \text{ctg } \alpha \\ \text{ctg } (90^\circ + \alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

Relasi α dan $(180^\circ - \alpha)$

$$\begin{aligned}\sin (180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos (180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan (180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \text{ctg } (180^\circ - \alpha) &= -\text{ctg } \alpha\end{aligned}$$

Relasi α dan $(180^\circ + \alpha)$

$$\begin{aligned}\sin (180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos (180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan (180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha \\ \text{ctg } (180^\circ + \alpha) &= \text{ctg } \alpha\end{aligned}$$

Relasi α dan $(270^\circ - \alpha)$

$$\begin{aligned}\sin (270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos (270^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan (270^\circ - \alpha) &= \text{ctg } \alpha \\ \text{ctg } (270^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

Relasi α dan $(270^\circ + \alpha)$

$$\begin{aligned}\sin (270^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos (270^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan (270^\circ + \alpha) &= -\text{ctg } \alpha \\ \text{ctg } (270^\circ + \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

Relasi α dan $(-\alpha)$

$$\begin{aligned}\sin (-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos (-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan (-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \text{ctg } (-\alpha) &= -\text{ctg } \alpha\end{aligned}$$

Relasi α dan $(360^\circ - \alpha)$

$$\begin{aligned}\sin (360^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos (360^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan (360^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \text{ctg } (360^\circ - \alpha) &= -\text{ctg } \alpha\end{aligned}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan nilai dari:

- a. $\sin 120^\circ$ c. $\cos 150^\circ$
b. $\tan 135^\circ$ d. $\sin 240^\circ$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \sin 120^\circ &= \sin (90 + 30)^\circ \\ &= \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ atau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin (180 - 60)^\circ \\ &= \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \tan 135^\circ &= \tan (90 + 45)^\circ \\ &= -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1 \text{ atau} \\ \tan 135^\circ &= \tan (180 - 45)^\circ \\ &= -\tan 45^\circ = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \cos 150^\circ &= \cos (90 + 60)^\circ \\ &= -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ atau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 150^\circ &= \cos (180 - 30)^\circ \\ &= -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \sin 240^\circ &= \sin (180 + 60)^\circ \\ &= -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ atau} \\ \sin 240^\circ &= \sin (270 - 30)^\circ \\ &= -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Tanya:

Tentukan nilai dari:

- a. $\operatorname{tg} 225^\circ$ c. $\cos 300^\circ$
b. $\cos 225^\circ$ d. $\tan 330^\circ$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \tan 225^\circ &= \tan (180 + 45)^\circ \\ &= \tan 45^\circ = 1 \text{ atau} \\ \tan 225^\circ &= \operatorname{ctg} (270 - 45)^\circ \\ &= \operatorname{ctg} 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \cos 225^\circ &= \cos (180 + 45)^\circ \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ atau} \\ \cos 225^\circ &= \cos (270 - 45)^\circ \\ &= -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \cos 300^\circ &= \cos (270 + 30)^\circ \\ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ atau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 300^\circ &= \cos (360 - 60)^\circ \\ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \tan 330^\circ &= \tan (270 + 60)^\circ \\ &= -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{1}{3} \sqrt{3} \text{ atau} \\ \tan 330^\circ &= \tan (360 - 30)^\circ \\ &= -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$

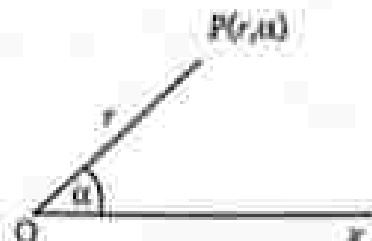
INFO MATEMATIKA

ONLINE MATHS TUTORIALS

Online Maths Tutorials is a free website for students and teachers. It provides a wide range of resources for learning and teaching mathematics. The website includes a variety of topics, from basic arithmetic to advanced calculus. It also features interactive tools and games to help students understand mathematical concepts. Teachers can use the website to find lesson plans, worksheets, and other resources. Online Maths Tutorials is a valuable resource for anyone interested in mathematics.

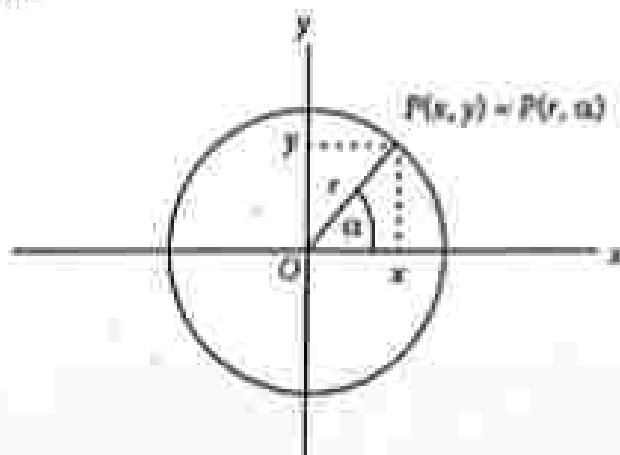
3. Koordinat Kutub

Posisi titik dalam koordinat cartesian dinyatakan dengan (x, y) . Selain itu, posisi titik dapat pula dinyatakan dengan koordinat kutub atau koordinat polar. Pada koordinat kutub terdapat garis horizontal yang disebut dengan sumbu kutub. Titik paling kiri sumbu kutub disebut kutub atau titik asal O . Sumbu kutub dan kutub ini menjadi acuan untuk menentukan posisi titik. Dalam koordinat kutub, titik dinyatakan dengan (r, α) , di mana r menyatakan jarak titik P dengan kutub O dan menyatakan sudut yang dibentuk antara OP dan sumbu kutub seperti pada gambar berikut.



4. Hubungan Koordinat Cartesius dengan Koordinat Kutub

Untuk dapat mengetahui hubungan antara koordinat cartesian dengan koordinat kutub, perhatikan gambar berikut.



Misal suatu titik dinyatakan dengan koordinat cartesian $P(x, y)$ dan koordinat kutub $P(r, \alpha)$. Sesuai dengan definisi trigonometri dan dalil Pythagoras maka

$\sin \alpha = \frac{y}{r}$ maka $y = r \sin \alpha$ dan $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ maka $x = r \cos \alpha$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \alpha = \arctan \frac{y}{x}$

Secara matematis:

Cara mengubah sudut dari koordinat cartesian ke koordinat kutub adalah sebagai berikut.

Jika $P(x, y)$ maka:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \alpha = \arctan \frac{y}{x}$

Cara mengubah sudut dari koordinat kutub ke koordinat cartesian adalah sebagai berikut.

Jika $P(r, \alpha)$ maka:

$x = r \cos \alpha$ dan $y = r \sin \alpha$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui koordinat kutub $P(2, 120^\circ)$. Bagaimana bentuk P dalam koordinat kartesius?

Jawab:

Koordinat kutub $P(r, \alpha)$, $r = 2$ dan $\alpha = 120^\circ$

$$x = r \cos \alpha = 2 \cos 120^\circ = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

$$y = r \sin \alpha = 2 \sin 120^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right) = \sqrt{3}$$

Jadi, $P = (-1, \sqrt{3})$.

Tanya:

Diketahui koordinat kartesius $P(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$. Bagaimana bentuk P dalam koordinat kutub?

Jawab:

Koordinat kartesius $P(x, y)$, $x = \sqrt{8}$ dan $y = -\sqrt{8}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + (-\sqrt{8})^2} = \sqrt{8+8} = 4$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = -1 \rightarrow \alpha = (360^\circ - 45^\circ) = 315^\circ$$

Jadi, $P(4, 315^\circ)$.

ASAHI OTAK

KOORDINAT KUTUB

1. Nyatakan setiap titik berikut ke dalam koordinat kutub.

a. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \sqrt{2} \right)$ c. $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

b. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ d. $(1, \sqrt{3})$

2. Nyatakan setiap titik berikut ke dalam koordinat kartesius.

a. $(3, 60^\circ)$ c. $(4, 225^\circ)$

b. $(-2, 135^\circ)$ d. $(2, 300^\circ)$

3. Misalkan pergerakan sebuah kapal dinyatakan dengan koordinat kutub. Dari titik P , kapal bergerak menuju Q dengan $(4 \text{ km}, 150^\circ)$ dari titik Q ke titik R dengan $(3 \text{ km}, 330^\circ)$. Tentukan jarak P ke R .

C. Fungsi Trigonometri Sederhana

1. Fungsi Trigonometri Sederhana

Fungsi trigonometri adalah fungsi yang memetakan himpunan sudut ke suatu himpunan nilai dengan menggunakan perbandingan trigonometri. Di dalam fungsi trigonometri, domainnya adalah himpunan sudut dan kodomainnya adalah himpunan bilangan.

Jika x anggota himpunan sudut dan $y \in \mathbb{R}$ maka berlaku fungsi trigonometri sebagai berikut.

$$y = \sin x; -1 \leq y \leq 1$$

$$y = \cos x; -1 \leq y \leq 1$$

$$y = \tan x; -\infty \leq y \leq \infty$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai maksimum dan nilai minimum setiap fungsi trigonometri berikut?

- a. $y = 3 \sin x$ c. $y = \cos x + 3$
b. $y = \frac{1}{2} \cos x$ d. $y = \sin x - 4$

Jawab:

- a. $y = 3 \sin x$
 $-1 \leq \sin x \leq 1$
 $3(-1) \leq 3 \sin x \leq 3(1)$
 $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$
Jadi, nilai maksimum = 3 dan nilai minimum = -3.

- b. $y = \frac{1}{2} \cos x$
 $-1 \leq \cos x \leq 1$
 $(-1) \frac{1}{2} \leq \cos x \leq (1) \frac{1}{2}$
 $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cos x \leq \frac{1}{2}$
Jadi, nilai maksimum = $\frac{1}{2}$ dan nilai minimum = $-\frac{1}{2}$.

- c. $y = \cos x + 3$
 $-1 \leq \cos x \leq 1$
 $3 + (-1) \leq \cos x + 3 \leq 3 + (1)$
 $2 \leq \cos x + 3 \leq 4$
Jadi, nilai maksimum = 4 dan nilai minimum = 2.

- d. $y = \sin x - 4$
 $-1 \leq \sin x \leq 1$
 $-4 - 1 \leq \sin x - 4 \leq 1 - 4$
 $-5 \leq \sin x - 4 \leq -3$
Jadi, nilai maksimum = -3 dan nilai minimum = -5.

2. Periode Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri adalah fungsi yang periodik. Hal ini disebabkan grafik fungsi trigonometri akan berulang setelah batas tertentu. Setiap fungsi trigonometri mempunyai perioditas yang berbeda.

Fungsi $y = \sin x$ adalah fungsi periodik dengan periode 360° , setiap 360° maka grafik akan kembali seperti pada sebelumnya. Fungsi $y = \cos x$ adalah fungsi periodik dengan periode 360° dan fungsi $y = \tan x$ adalah fungsi periodik dengan periode 180° .

Perioditas fungsi trigonometri dapat dituliskan sebagai berikut.

fungsi $y = \sin nx$ adalah fungsi periodik dengan periode $\frac{360^\circ}{n}$

fungsi $y = \cos nx$ adalah fungsi periodik dengan periode $\frac{360^\circ}{n}$

fungsi $y = \tan nx$ adalah fungsi periodik dengan periode $\frac{180^\circ}{n}$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah nilai dari:

- a. $\sin 480^\circ$
- b. $\cos 390^\circ$
- c. $\tan 480^\circ$
- d. $\sin 765^\circ$
- e. $\cos 690^\circ$
- f. $\tan 765^\circ$

Jawab:

- a. $\sin 480^\circ = \sin (120 + 360)^\circ = \sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- b. $\cos 390^\circ = \cos (30 + 360)^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- c. $\tan 480^\circ = \tan (120 + 2 \cdot 180)^\circ = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$
- d. $\sin 765^\circ = \sin (45 + 2 \cdot 360)^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- e. $\cos 690^\circ = \cos (-30 + 2 \cdot 360)^\circ = \cos (-30)^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- f. $\tan 765^\circ = \tan (45 + 4 \cdot 180)^\circ = \tan 45^\circ = 1$

Tanya:

Berapakah nilai dari:

- a. $\sin 1.020^\circ$
- b. $\cos 1.710^\circ$

Jawab:

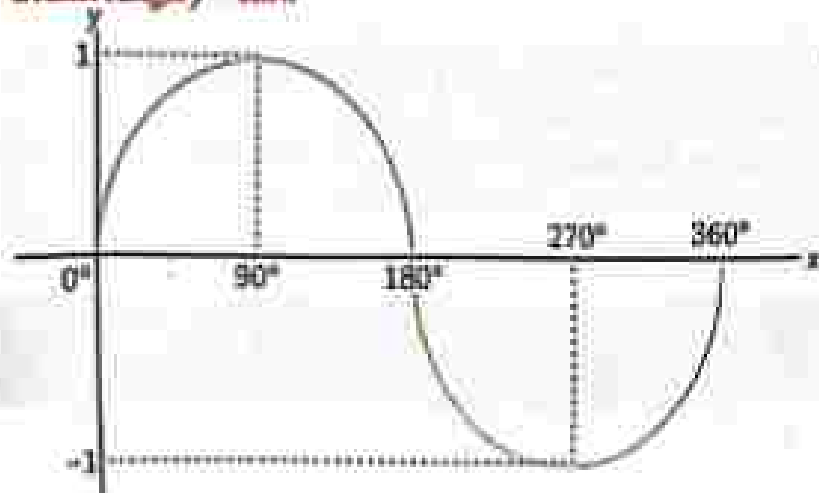
- a. $\sin 1.020^\circ = \sin (300 + 2 \cdot 360)^\circ = \sin 300^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- b. $\cos 1.110^\circ = \cos (-90 + 5 \cdot 360)^\circ = \cos (-90)^\circ = 0$

3. Grafik Fungsi Trigonometri

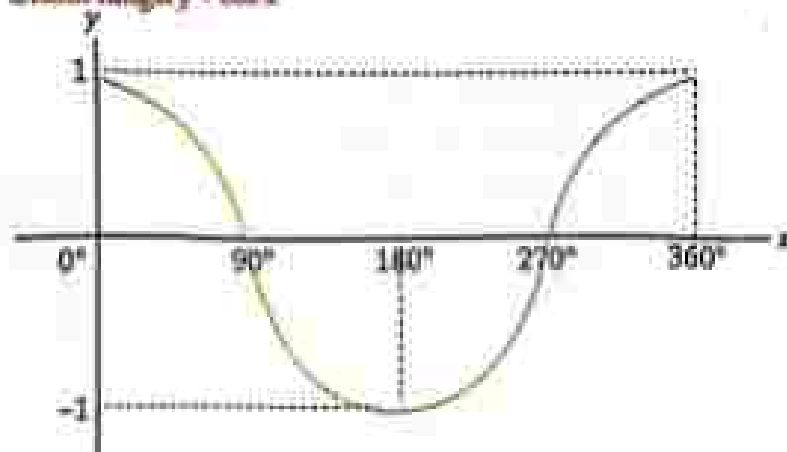
Grafik fungsi trigonometri dapat digambar dengan memplot pasangan titik (x, y) yang memenuhi fungsi pada koordinat cartesius, kemudian menghubungkan titik-titik tersebut dengan kurva lengkung mulus.

Berikut disajikan grafik fungsi dasar fungsi trigonometri.

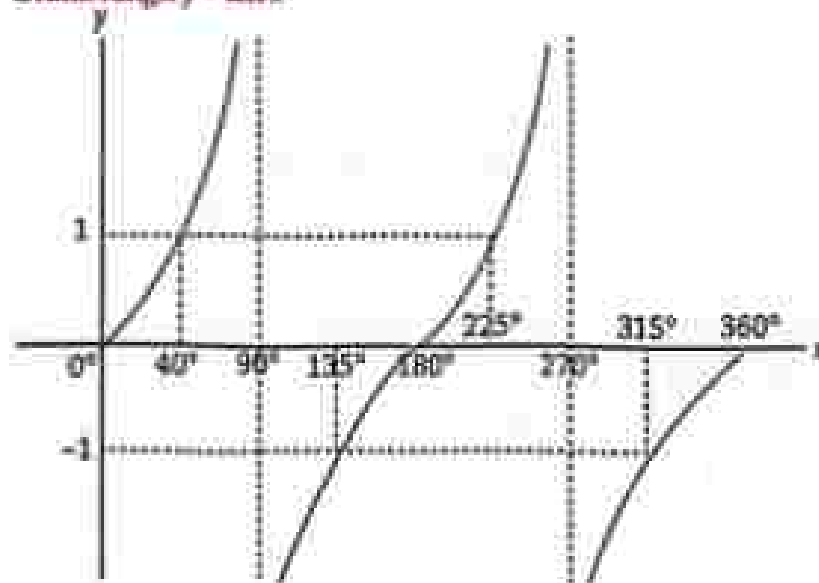
Grafik fungsi $y = \sin x$



Grafik fungsi $y = \cos x$



Grafik fungsi $y = \tan x$



Dari rumus dasar tersebut, kita bisa mendapatkan grafik fungsi trigonometri lain dengan mengacu pada grafik dasar tersebut.

Jika $\alpha \neq 0$ dan $f(x)$ adalah grafik-grafik fungsi baku trigonometri $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, dan $f(x) = \tan x$ maka

1. Grafik fungsi $f(x - \alpha)$ didapat dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser ke kanan sejauh α .
2. Grafik fungsi $f(x + \alpha)$ didapat dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser ke kiri sejauh α .

Jika c adalah bilangan riil positif yang tidak sama dengan nol dan $f(x)$ adalah grafik-grafik fungsi baku trigonometri $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, dan $f(x) = \tan x$ maka:

1. Grafik fungsi $f(x) - c$ didapat dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser ke bawah sejauh c .
2. Grafik fungsi $f(x) + c$ didapat dari grafik fungsi $f(x)$ yang digeser ke atas sejauh c .

TANYA & JAWAB

Tanya:

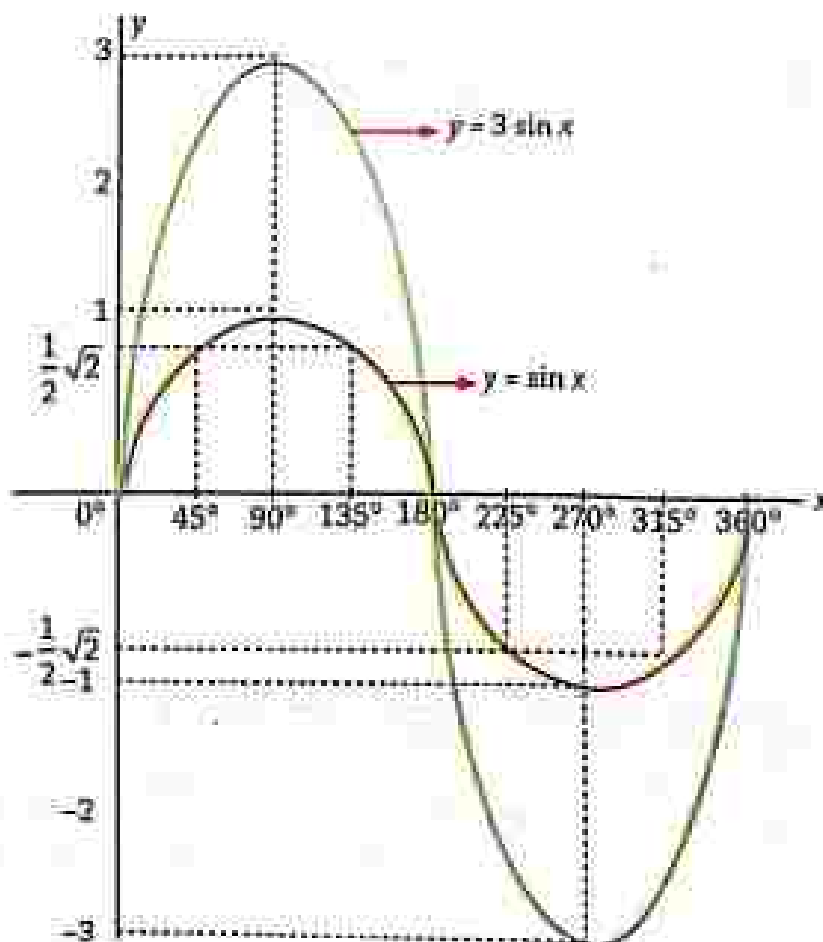
Gambarkan grafik dari $y = 3 \sin x$.

Jawab:

$$y = 3 \sin x$$

Untuk menggambarkan $y = 3 \sin x$, kita dapat menggunakan grafik dasar $y = \sin x$ sebagai acuan.

Untuk membuat grafik $y = 3 \sin x$, berarti kita cukup mengalikan grafik $y = \sin x$ dengan 3.

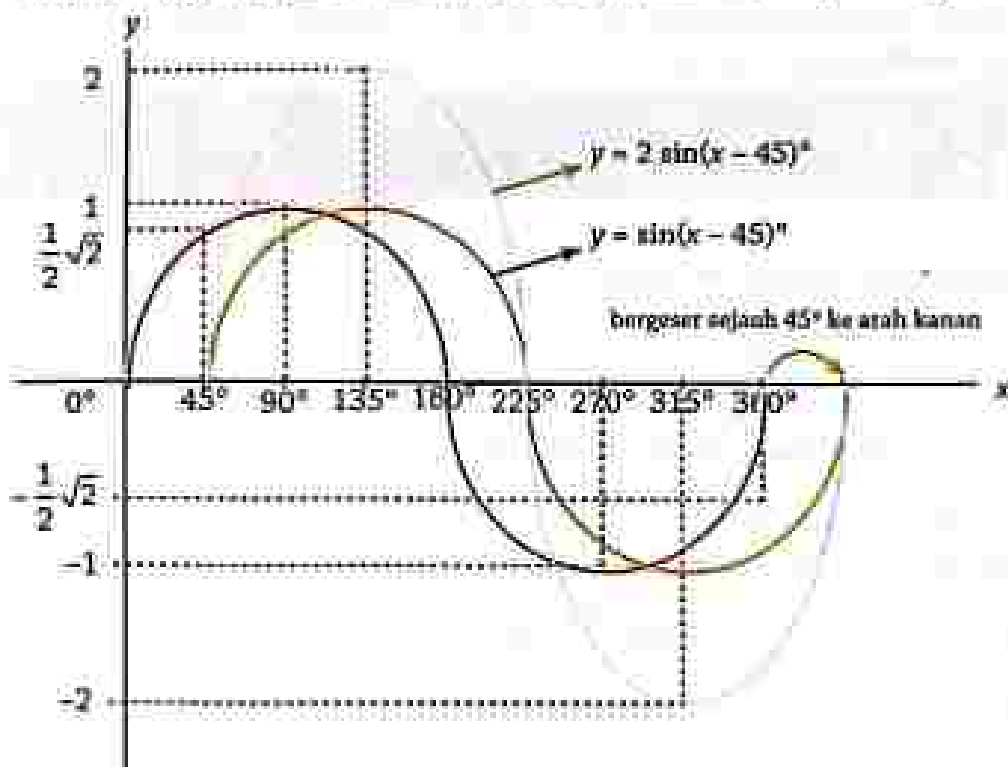


Tanya:

Gambarkan grafik dari $y = 2 \sin (x - 45)^\circ$.

Jawab:

Untuk menggambar grafik fungsi $y = 2 \sin (x - 45)^\circ$, kita dapat menggunakan grafik dasar $y = \sin x$ dengan menggeser grafik ke kanan sejauh 45° . Kemudian, mengalikan grafik tersebut dengan 2.



ASAHI OTAK

TRIGONOMETRI

- Tentukan nilai dari:
 - $\sin 540^\circ$
 - $\cos 630^\circ$
 - $\tan 495^\circ$
 - $\sin 855^\circ$
 - $\cos 780^\circ$
 - $\tan 1.125^\circ$
- Tentukan periode setiap fungsi berikut.
 - $y = \sin 3x^\circ$
 - $y = 2 \cos 2x^\circ$
 - $y = 3 \tan (2x + 2)^\circ$
 - $y = \sin 3(x + 6)^\circ$
 - $y = 2 \cos 2(3x + 4)^\circ$
 - $y = 3 \tan 2(2x - 4)^\circ$
- Dengan menggunakan grafik fungsi dasar $y = \cos x$, gambarkan grafik fungsi trigonometri berikut.
 - $y = 2 \cos x$
 - $y = -3 \cos 2x + 4$
- Dengan menggunakan grafik fungsi dasar $y = \tan x$, gambarkan grafik fungsi trigonometri berikut.
 - $y = -\tan x$
 - $y = 3 + \tan 3x$
- Dengan menggunakan grafik fungsi dasar $y = \sin x$, gambarkan grafik fungsi trigonometri berikut.
 - $y = 3 \sin 2x - 5$
 - $y = 2 \sin (2x - 10)^\circ - 3$

D. Persamaan Trigonometri Sederhana

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang variabelnya terkandung di dalam trigonometri. Penyelesaian persamaan trigonometri adalah suatu nilai pengganti variabel yang apabila disubstitusikan ke dalam persamaan trigonometri tersebut maka persamaan trigonometri itu menjadi bernilai benar. Untuk dapat menentukan penyelesaian persamaan trigonometri sederhana, perhatikan beberapa contoh berikut.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\sin x = \frac{1}{2}$

b. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Jawab:

a. $\sin x = \frac{1}{2}$, nilai x positif jika x berada di kuadran I dan II.

maka i. $\sin x = \sin 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

ii. $\sin x = \sin (180 - 30)^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Jadi, persamaan $\sin x = \frac{1}{2}$ benar untuk x sama dengan 30° dan 150° .

b. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, nilai x positif jika x berada di kuadran I dan IV.

maka i. $\cos x = \cos 45^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$

ii. $\cos x = \cos (360 - 45)^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

Jadi, persamaan $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ benar untuk x sama dengan 45° dan 315° .

c. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, nilai x positif jika x berada di kuadran I dan III.

maka i. $\tan x = \tan 30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

ii. $\tan x = \tan (180 + 30)^\circ \Rightarrow x = 210^\circ$

Jadi, persamaan $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ benar untuk x sama dengan 30° dan 210° .

Tanya:

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\tan (3x + 20)^\circ = \operatorname{ctg} (x - 50)^\circ$.

Jawab:

$\tan (3x + 20)^\circ = \operatorname{ctg} (x - 50)^\circ$

a. Oleh karena $\tan (90 - A)^\circ = \operatorname{ctg} A$,

maka $\operatorname{ctg} (x - 50)^\circ = \tan (90 - (x - 50))^\circ$

Jadi, $\tan (3x + 20)^\circ = \operatorname{ctg} (x - 50)^\circ$ ekuivalen dengan:

$\tan (3x + 20)^\circ = \tan (90 - (x - 50))^\circ$

$3x + 20^\circ = 90^\circ - x + 50^\circ$

$4x = 120^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

b. Oleh karena $\tan (270 - A)^\circ = \operatorname{ctg} A$,

maka $\operatorname{ctg} (x - 50)^\circ = \tan (270 - (x - 50))^\circ$

Jadi, $\tan (3x + 20)^\circ = \operatorname{ctg} (x - 50)^\circ$ ekuivalen dengan:

$\tan (3x + 20)^\circ = \tan (270 - (x - 50))^\circ$

$3x + 20^\circ = 270^\circ - x + 50^\circ$

$4x = 300^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$

Jadi, persamaan $\tan (3x + 20)^\circ = \operatorname{ctg} (x - 50)^\circ$ benar untuk x sama dengan 30° dan 75° .

Tanya:

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\sin (2x - 40)^\circ = \cos (3x + 10)^\circ$.

Jawab:

$$\sin (2x - 40)^\circ = \cos (3x + 10)^\circ$$

- a. Oleh karena $\sin (90 - A)^\circ = \cos A$
maka $\cos (3x + 10)^\circ = \sin (90 - (3x + 10))^\circ$

Dengan demikian,

$$\sin (2x - 40)^\circ = \cos (3x + 10)^\circ \text{ ekuivalen dengan:}$$

$$\sin (2x - 40)^\circ = \sin (90 - (3x + 10))^\circ$$

$$2x - 40^\circ = 90^\circ - 3x - 10^\circ$$

$$5x = 120^\circ$$

$$x = 24^\circ$$

- b. Oleh karena $\sin (90 + A)^\circ = \cos A$
maka $\cos (3x + 10)^\circ = \sin (90 + (3x + 10))^\circ$

Dengan demikian,

$$\sin (2x - 40)^\circ = \cos (3x + 10)^\circ \text{ ekuivalen dengan:}$$

$$\sin (2x - 40)^\circ = \sin (90 + (3x + 10))^\circ$$

$$2x - 40^\circ = 90^\circ + 3x + 10^\circ$$

$$-x = 140^\circ$$

$$x = -140^\circ$$

- c. Oleh karena $\cos (270 + A)^\circ = \sin A$
maka $\sin (2x - 40)^\circ = \cos (270 + (2x - 40))^\circ$

Dengan demikian,

$$\sin (2x - 40)^\circ = \cos (3x + 10)^\circ \text{ ekuivalen dengan:}$$

$$\cos (270 + (2x - 40))^\circ = \cos (3x + 10)^\circ$$

$$270^\circ + 2x - 40^\circ = 3x + 10^\circ$$

$$-x = -220^\circ$$

$$x = 220^\circ$$

Jadi, persamaan $\sin (2x - 40)^\circ = \cos (3x + 10)^\circ$ benar untuk $x = -140^\circ$, 24° , dan 220° .

ASAHI OTAK

PELUKUKAN MATEMATIKA BERKUALITAS

1. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\cos x = \frac{1}{2}$

c. $\tan x = \sqrt{3}$

b. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Jika $(\sin x + 3)(\sin x - 1) = 0$, tentukan nilai x yang memenuhi interval $0 \leq x \leq 360^\circ$.
3. Tentukan nilai x pada interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ yang memenuhi persamaan $\sin (2x - 30)^\circ = \cos 45^\circ$.
4. Tentukan nilai x pada interval $0 \leq x \leq 2$ agar $0,75 + \sin^2 x = 1$.

E. Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri merupakan pembuktian dua buah persamaan trigonometri. Pembuktian identitas trigonometri dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu sebagai berikut.

1. Mengubah ruas kiri sehingga sama dengan ruas kanan.
2. Mengubah ruas kanan sehingga sama dengan ruas kanan.
3. Mengubah ruas kiri dan ruas kanan menjadi pernyataan yang sama.

Beberapa rumus identitas trigonometri dasar yang sering digunakan dalam pembuktian identitas trigonometri adalah

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \sec^2 \alpha \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \operatorname{cosec}^2 \alpha\end{aligned}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Buktikan bahwa: $\sec \alpha - \tan \alpha \sin \alpha = \cos \alpha$

Jawab:

$$\sec \alpha - \tan \alpha \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\text{ruas kiri} = \sec \alpha - \tan \alpha \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha \quad (\text{ruas kanan})$$

Jadi, $\sec \alpha - \tan \alpha \sin \alpha = \cos \alpha$ (terbukti).

Tanya:

Buktikan bahwa:

$$\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Jawab:

$$\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{ruas kanan} = \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)$$

$$= (1 - \cos^2 \alpha)(-\cos^2 \alpha)$$

$$= -\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha \quad (\text{ruas kiri})$$

Jadi, $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha$ (terbukti).

Tanya:

Buktikan bahwa:

$$\frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{ctg} x$$

Jawab:

$$\frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{ctg} x$$

$$\text{ruas kiri} = \frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x (2 \sin x - 1)}{1 - \sin^2 x + \sin^2 x - (1 - \sin^2 x)}$$

$$= \frac{\cos x (2 \sin x - 1)}{2 \sin^2 x - \sin x}$$

$$= \frac{\cos x (2 \sin x - 1)}{\sin x (2 \sin x - 1)}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \quad (\text{ruas kanan})$$

Jadi, $\frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{ctg} x$ (terbukti).

Tanya:

Buktikan bahwa $\tan x + \operatorname{ctg} x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$.

Jawab:

$$\tan x + \operatorname{ctg} x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

ruas kiri ruas kanan

$$\tan x + \operatorname{ctg} x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$



$$\frac{1}{\cos x + \sin x} + \frac{1}{\cos x + \sin x}$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \cdot \sin x}$$

Jadi, $\tan x + \operatorname{ctg} x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$ (terbukti).

Tanya:

Buktikan bahwa: $\cot x \cdot \cos x = \operatorname{csc} x - \sin x$.

Jawab:

ruas kiri:

$$\begin{aligned} \cot \alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\sec \alpha} \\ &= \frac{\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\tan \alpha \cdot \sec \alpha} \\ &= \frac{\sec^2 \alpha}{\tan \alpha \cdot \sec \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \alpha \cdot \sec \alpha} \\ &= \frac{\sec \alpha}{\tan \alpha} - \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \\ &= \operatorname{csc} \alpha - \sin \alpha \end{aligned}$$

ruas kanan:

$$\begin{aligned} \operatorname{csc} \alpha - \sin \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \\ &= \cot \alpha \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Jadi, $\cot x \cdot \cos x = \operatorname{csc} x - \sin x$ (terbukti).

ASAH OTAK

Buktikan identitas-identitas berikut ini.

1. $\frac{\tan^2 A - \sin^2 A}{1 - \sin^2 A} = \tan^2 A$

2. $\frac{\tan A + \operatorname{ctg} A}{\tan A - \operatorname{ctg} A} = \frac{1}{1 - 2\cos^2 A}$

3. $\frac{\tan A - 1}{\tan A + 1} \cdot \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = 1$

4. $\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{ctg} A + \tan A} = \cos A$

5. $\sin x \tan x + \cos x = \sec x$

6. $\sec x + \tan x = \frac{1}{\sec x - \tan x}$

7. $\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} + 1 = \sec x$

8. $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$

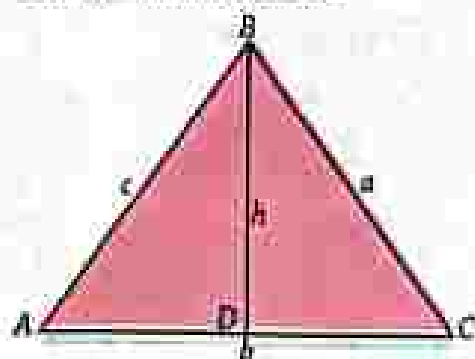
F. Luas Segitiga, Aturan Sinus, dan Aturan Kosinus

1. Luas Segitiga

Sebelumnya, kita telah mengenal luas segitiga dengan rumus:

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \cdot \text{alas} \times \text{tinggi}$$

Perhatikan $\triangle ABC$ berikut.



$$\text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \quad \dots (1)$$

Dari $\triangle BCD$,

$$\sin C = \frac{h}{a}$$

$$h = a \sin C \quad \dots (2)$$

Substitusikan (1) ke (2), diperoleh:

$$\text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \sin C$$

LET'S DO IT

Buktikan bahwa dengan langkah yang sama, berlaku:

$$\text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin A$$

$$\text{Luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \sin B$$



Secara umum, pada $\triangle ABC$ dengan sudut-sudutnya A , B , dan C serta sisi-sisi di hadapan sudut tersebut berturut-turut adalah a , b , dan c berlaku:

$$L = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$L = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$L = \frac{1}{2} ab \sin C$$

TANYA & JAWAB

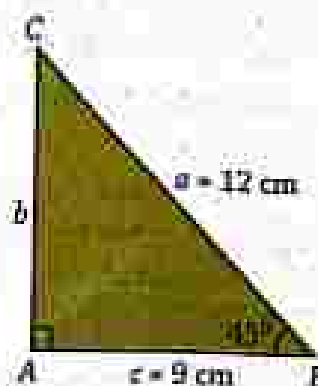
Tanya:

Tentukan luas $\triangle ABC$, jika $a = 12$ cm, $c = 9$ cm dan $\angle B = 45^\circ$.

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Luas segitiga } ABC &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot (12) \cdot (9) \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot (108) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= 27\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, luas $\triangle ABC$ adalah $27\sqrt{2}$.



Tanya:

Dalam $\triangle PQR$, diketahui $PQ = 2 PR$ dan $\angle P = 150^\circ$. Jika luas $\triangle PQR$ adalah 32 cm^2 , tentukan panjang PR .

Jawab:

Luas segitiga $PQR = \frac{1}{2} \cdot q \cdot r \sin P$

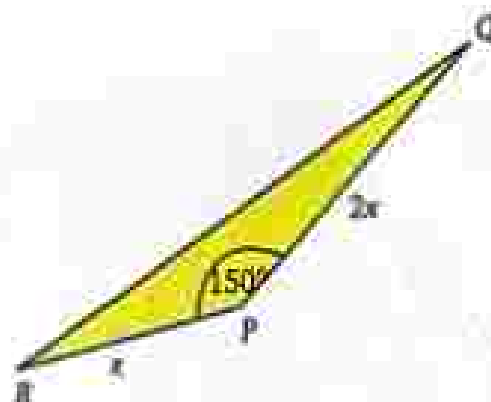
$$32 = \frac{1}{2} (x) (2x) \sin 150^\circ$$

$$32 = \frac{1}{2} (2x^2)$$

$$32 = \frac{1}{2} x^2$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ cm}$$



Jadi, panjang PR adalah 8 cm.

Tanya:

Pada gambar diketahui $AB = 20 \text{ cm}$, $\angle BAC = 90^\circ$, dan $\angle ACB = 30^\circ$. Tentukan luas $\triangle ABC$.

Jawab:

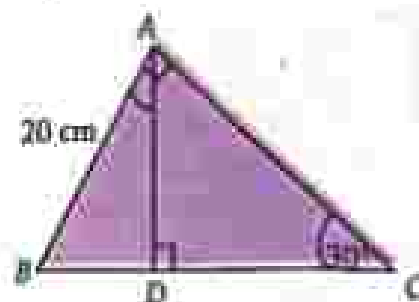
Dari gambar terlihat bahwa $\angle DAB = 30^\circ$, $\cos A = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{20}$

$$AD = 20 \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

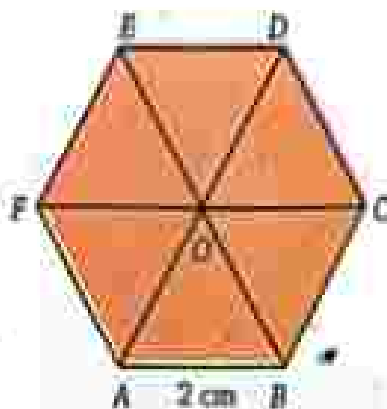
Dari $\triangle ACD$, $\sin \angle C = \frac{AD}{AC} = \frac{10\sqrt{3}}{AC}$

$$AC = \frac{10\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin A = \frac{1}{2} (20) (20) \sin 90^\circ = 200 \text{ cm}^2$$

**Tanya:**

Tentukan luas segi enam beraturan ABCDEFGH dengan panjang $AB = 2 \text{ cm}$.

**Jawab:**

Karena segi enam ABCDEF beraturan maka:

$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOE = \triangle EOF = \triangle FOA =$ sama sisi

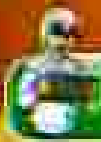
Perhatikan $\triangle AOB$.

$$\text{Luas segitiga } AOB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin O = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (2) \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (4) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Jadi, luas segi enam ABCDEF = $6 \times \text{Luas } \triangle AOB = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



IT'S AMAZING

Sumber gambar: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/43/Api1-melli-Graslinia-purpur-homocidus-2.jpg> dan <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2c/Api1-melli-Graslinia-purpur-homocidus-2.jpg>

Tahukah anda bahwa lebah madu tidak hanya terkenal sebagai hewan kecil yang menghasilkan madu, tapi juga terkenal sebagai makhluk hidup yang "jenius"? Sebagai hewan, lebah madu hidup berkoloni (berkelompok) dalam sarang yang mereka bangun sendiri dengan sangat teliti. Dalam tiap sarang, terdapat ribuan kantung berbentuk heksagonal atau segi enam yang dibuat untuk menyimpan madu. Pernahkah kita berfikir, mengapa mereka membuat kantung-kantung yang berbentuk heksagonal? Nah, para ahli matematika pun mencari jawaban atas pertanyaan ini. Ternyata, setelah melakukan perhitungan yang panjang, mereka menemukan jawaban yang sangat menarik. Yakni, bahwa cara terbaik membangun gudang simpanan dengan kapasitas terbesar dan menggunakan bahan bangunan sesedikit mungkin adalah dengan membuat dinding berbentuk heksagonal. Sebab, menurut mereka, bila lebah-lebah itu membangun dengan kantung-kantung penyimpan dalam bentuk tabung atau seperti prisma segitiga, maka akan terbentuk celah kosong di antara kantung satu dengan lainnya.

Lebih dari itu, lebih sedikit madu yang tersimpan di dalamnya. Kantung madu berbentuk segitiga atau persegi bisa saja dibuat tanpa meninggalkan celah kosong, tapi ahli matematika menyadari satu hal terpenting. Dari semua bentuk geometrie tersebut, yang memiliki keliling paling kecil adalah heksagonal. Karena alasan inilah, walaupun bentuk-bentuk tersebut menutupi luas areal yang sama, material yang diperlukan untuk membangun heksagonal lebih sedikit dibandingkan dengan persegi atau segitiga. Karena itu, wajar bila Allah swt. berfirman, "Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: buatlah sarang-sarang di bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang dibuat manusia. Kemudian, makanlah dari setiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang telah dimudahkan (bagimu)." (Qs. An-Nahl, 16: 68 – 69).

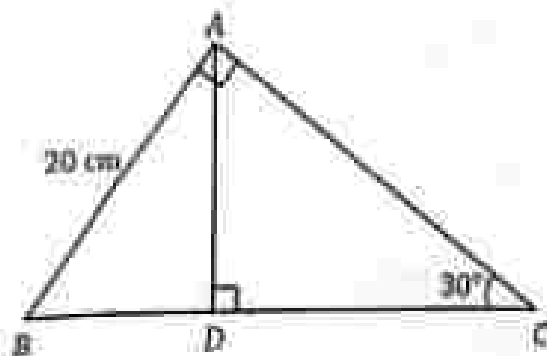


Sumber: <http://kotakultra.com>

ASAHI OTAK

INDONESIA JUDONOMITRI

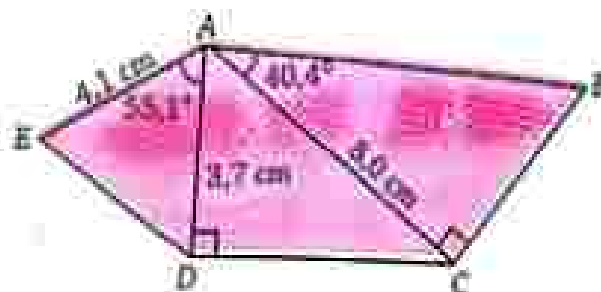
1. Tentukan luas $\triangle ABC$, jika diketahui $\angle A = 45^\circ$, $b = 15$ cm, dan $c = 22$ cm.
2. Pada gambar berikut, diketahui $AB = 20$ cm, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, dan AD tegak lurus BC .



Tentukan:

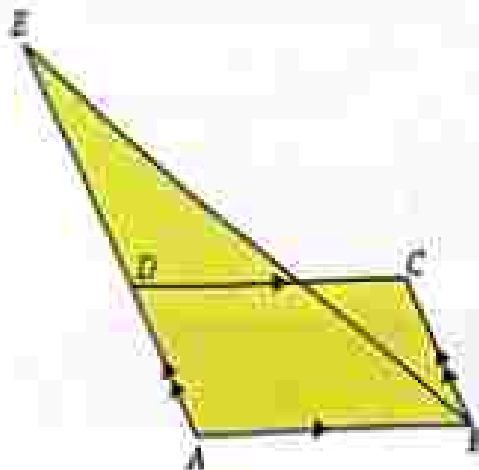
- a. $\angle BAD$
- b. panjang BD

3. Pada gambar berikut, diketahui $\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle EAD = 55,1^\circ$, $\angle CAB = 40,4^\circ$, $AE = 4,1$ cm, $AD = 3,7$ cm, dan $AC = 8,0$ cm.



Tentukan:

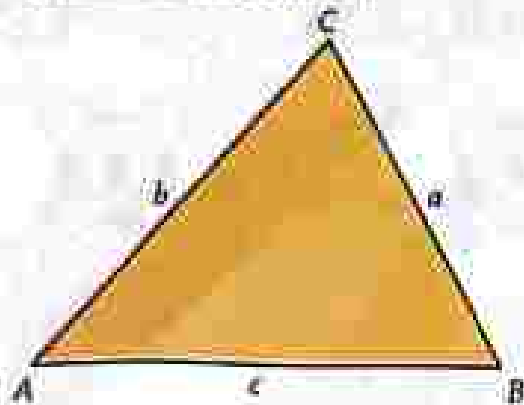
- a. $\angle ACD$
- b. panjang AB



4. Perhatikan gambar di samping.
Diketahui $DE = 2AD$ dan luas $ABCD = 20$ cm².
Tentukan luas $\triangle ABC$.

2. Aturan Sinus

Perhatikan $\triangle ABC$ berikut.



Dari segitiga ABC di samping, kita ketahui bahwa luas segitiga tersebut adalah

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Jika setiap ruas dibagi dengan $\frac{1}{2} abc$ maka diperoleh

$$\frac{\frac{1}{2} bc \sin A}{\frac{1}{2} abc} = \frac{\frac{1}{2} ac \sin B}{\frac{1}{2} abc} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin C}{\frac{1}{2} abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Bentuk di atas dapat ditulis

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Bentuk di atas disebut dengan aturan sinus.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui $\triangle ABC$ dengan $A = 67,6^\circ$, $B = 45,5^\circ$, dan $C = 7,6$ cm. Tentukan panjang a dan b .

Jawab:

Jumlah sudut-sudut dalam suatu segitiga adalah 180° sehingga

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$67,6^\circ + 45,5^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 66,9^\circ$$

Semai aturan sinus:

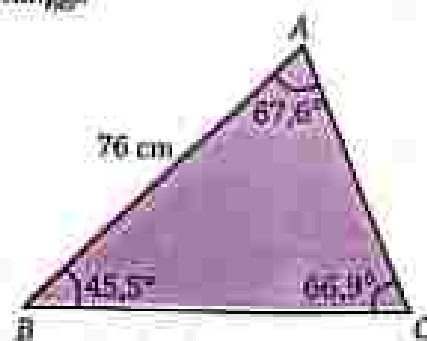
$$\frac{7,6}{\sin 66,9^\circ} = \frac{a}{\sin 67,6^\circ}$$

$$a = \frac{7,6 \sin 67,6^\circ}{\sin 66,9^\circ} = 7,64 \text{ cm}$$

$$\text{dan } \frac{7,6}{\sin 66,9^\circ} = \frac{b}{\sin 45,5^\circ}$$

$$b = \frac{7,6 \sin 45,5^\circ}{\sin 66,9^\circ} = 5,89 \text{ cm}$$

Jadi, panjang $a = 7,64$ cm dan panjang $b = 5,89$ cm.





sumber: <http://www.farhangifars.com>

NASIR AL-DIN AL-TUSI (1201 - 1274)

Matematikawan dari Iran

Nasir Al-Din Al-Tusi memiliki nama lengkap Abu Jafar Muhammad ibn Muhammad ibn al-Hasan Nasir al-Din al-Tusi. Namun, ia dikenal dengan al-Tusi. Ia seorang matematikawan yang dilahirkan pada tanggal 18 Februari 1201 di Tus, Khorasan (sekarang Iran).

Al-Tusi adalah salah satu ilmuwan, matematikawan, astronomer, teolog, filsafat, dan ahli fisika yang terkenal dan terbesar pada masanya. Ia adalah penulis yang produktif, ia banyak menulis karya yang secara dalam membahas tentang aljabar, aritmetika, trigonometri, geometri, logika, metafisika, pengobatan, seni, dan agama.

Dalam astronomi, Tusi membuat tabel dari pergerakan planet-planet dengan sangat akurat dan tergambar dalam bukunya "Zij-i Ilkhani" (*the Ilkhanic Tables*). Buku ini memuat tabel untuk memperkirakan posisi planet-planet dan nama-nama bintang. Sistem planet yang ia buat adalah yang paling berkembang dan digunakan secara luas sampai muncul model heliosentris yang dibuat oleh Copernicus. Sebagai tambahan informasi, karena jasanya dalam astronomi, sebuah kawah bulan berdiameter 60 km di belahan bumi utara dinamakan sesuai dengan namanya "Nasireddin".



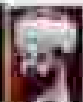
sumber: www.nasa.gov

Dalam Matematika, kontribusi terbesar mungkin terdapat pada bidang trigonometri. Pada tahun 1247 Al-Tusi memperkenalkan berbagai teknik variasi untuk menghitung sinus sudut suatu segitiga. Teknik variasi ini tertuang dalam bukunya yang berjudul *Tahrir al-Majisti*. Al-Tusi memperkenalkan rumus yang saat ini dikenal dengan **aturan sinus**, yaitu:

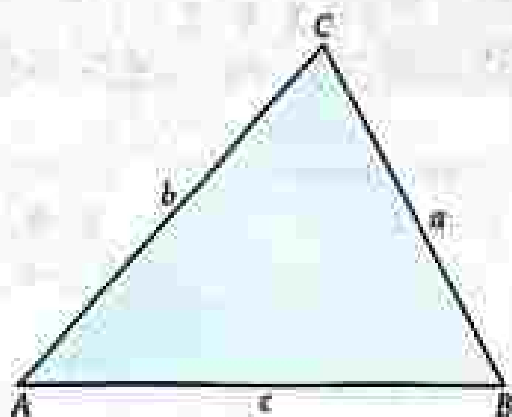
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Sumber:

http://www.ilmuanikmatika.com/index.php?option=com_content&view=article&id=1447&Itemid=1
http://www.ilmuanikmatika.com/index.php?option=com_content&view=article&id=1447&Itemid=1
http://www.ilmuanikmatika.com/index.php?option=com_content&view=article&id=1447&Itemid=1



3. Aturan Kosinus



Pada $\triangle ABC$ dengan sudut-sudutnya A , B , dan C serta sisi-sisi dihadapan sudut tersebut berturut-turut adalah a , b , dan c berlaku aturan kosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Pembuktian untuk aturan kosinus di atas adalah sebagai berikut,

Dalam $\triangle BCD$:

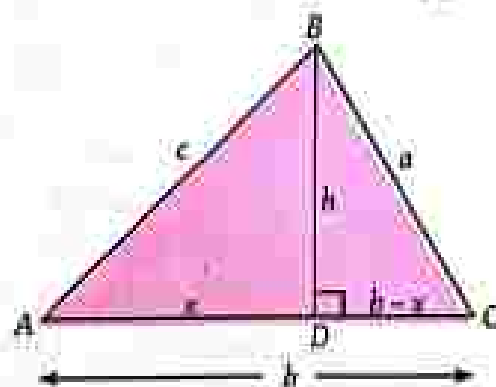
$$a^2 = h^2 + (b-x)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Dalam $\triangle BAD$:

$$\cos A = \frac{x}{c}$$

$$x = c \cos A \quad \dots\dots\dots (2)$$



dan:

$$c^2 = x^2 + h^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

Substitusikan (2) dan (3) ke (1):

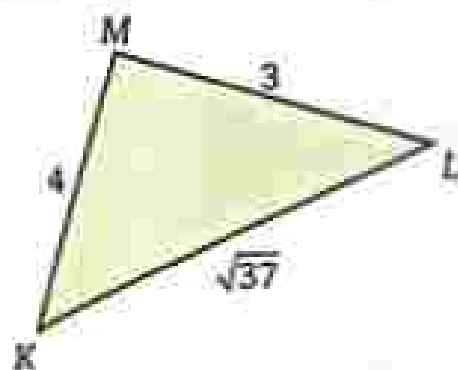
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Dengan menggunakan aturan kosinus, nilai kosinus masing – masing sudut pada $\triangle ABC$ dapat ditentukan. Jika sudut-sudutnya A , B , dan C serta sisi-sisi dihadapan sudut tersebut berturut-turut adalah a , b , dan c maka

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ dan } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Tanya:

Tentukan besar sudut M pada segitiga KLM berikut.

**Jawab:**

Sesuai dengan aturan kosinus maka

$$\cos \angle M = \frac{k^2 + l^2 - m^2}{2kl} = \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{37})^2}{2(3)(4)} = \frac{9 + 16 - 37}{24} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \angle M = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \angle M = 120^\circ$$

Tanya:

Pada $\triangle ABC$, diketahui $a = 8$ cm, $b = 9$ cm, dan $c = 12$ cm. Tentukan besar sudut terkecil dari $\triangle ABC$.

Jawab:

Sudut terkecil adalah sudut yang terbentuk dari sisi terpendek dan terpanjang sehingga sudut terkecil adalah sudut A .

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9^2 + 12^2 - 8^2}{2(9)(12)} = \frac{81 + 144 - 64}{216} = \frac{161}{216} = 0,745370 \dots$$

Jadi, $A = 41,8^\circ$. (gunakanlah kalkulator)

Tanya:

Diketahui $\triangle ABC$ yang panjang sisi-sisinya adalah 7 cm, 8 cm, dan 9 cm. Tentukan luas $\triangle ABC$.

Jawab:

Diketahui $a = 7$ cm, $b = 8$ cm, dan $c = 9$ cm.

Menurut aturan kosinus maka

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$7^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cos A$$

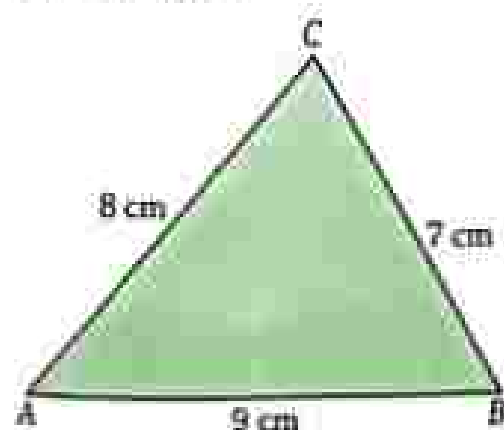
$$49 = 64 + 81 - 144 \cos A$$

$$-96 = -144 \cos A$$

$$\cos A = \frac{96}{144} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{ingat : } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad \sin A = \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

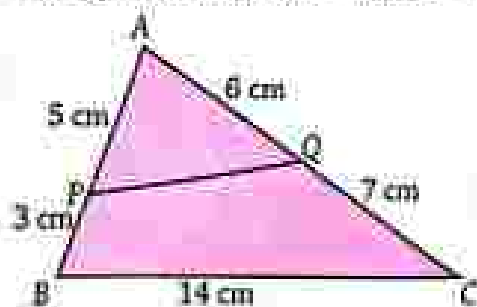
$$L = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{5} = 12 \sqrt{5} \text{ cm}^2$$



ASAHI OTAK

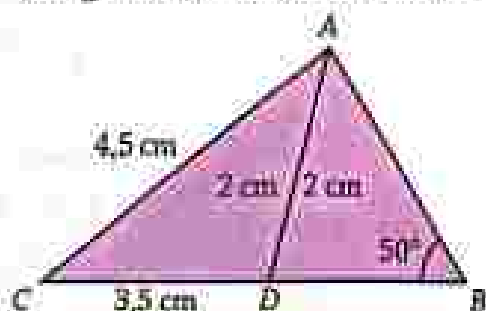
ATURAN KOSINUS

1. Tentukan panjang sisi c pada tiap $\triangle ABC$ jika
 - a. $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, dan $\angle C = 60^\circ$
 - b. $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, dan $\angle C = 120^\circ$
 - c. $a = 9$ cm, $b = 7$ cm, dan $\angle C = 30^\circ$
 - d. $a = 72$ cm, $b = 57$ cm, dan $\angle C = 90,7^\circ$
 - e. $a = 4,2$ cm, $b = 5,8$ cm, dan $\angle C = 141,4^\circ$
2. Pada $\triangle ABC$, diketahui $a = 3,8$ cm, $b = 5,3$ cm, dan $c = 6,7$ cm. Tentukan nilai sudut terbesar pada $\triangle ABC$.
3. Pada $\triangle PQR$, diketahui $p = 7$ cm, $q = 5$ cm, dan $r = 3$ cm. Tentukan $\angle P$.
4. Pada gambar berikut, diketahui $AP = 5$ cm, $AQ = 6$ cm, $AC = 13$ cm, dan $BC = 14$ cm.



Tentukan:

- a. $\cos \angle A$
 - b. panjang PQ
5. Pada gambar berikut, diketahui $AD = 2$ cm, $AC = 4,5$ cm, $CD = 3,5$ cm, dan $\angle ABD = 50^\circ$.



Tentukan:

- a. $\angle ADB$
 - b. jarak terdekat dari A ke CD
 - c. panjang BD
6. Diketahui $\triangle PQR$ yang panjang sisi-sisinya adalah 3 cm, 5 cm, dan 8 cm. Tentukan luas $\triangle PQR$.

1. Pengukuran sudut yang dilakukan mempunyai dua satuan pengukuran, yaitu derajat dan radian (penulisan radian biasa diingkat rad).

2. Jika sisi $AB = c$, $BC = a$, dan $AC = b$ maka nilai perbandingan trigonometri pada segitiga ABC adalah

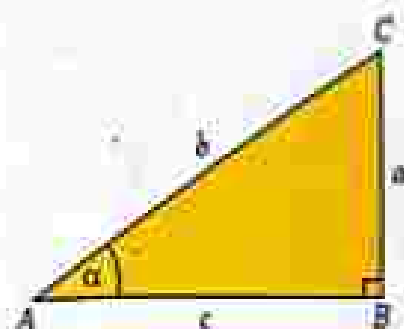
i. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ iv. $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$

ii. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ v. $\sec \alpha = \frac{c}{b}$

iii. $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ vi. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$

3. Tabel trigonometri untuk sudut-sudut istimewa.

	α				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-



4. Nilai dari perbandingan trigonometri di empat kuadran adalah sebagai berikut.

- i. Di kuadran I, nilai $\sin$, $\cos$, dan $\tan$ semuanya positif
- ii. Di kuadran II, nilai $\sin$ positif, nilai $\cos$, dan $\tan$ negatif
- iii. Di kuadran III, nilai $\tan$ positif, nilai $\sin$, dan $\cos$ negatif
- iv. Di kuadran IV, nilai $\cos$ positif, nilai $\sin$, dan $\tan$ negatif

5. Mengubah koordinat cartesian ke koordinat kutub.

Jika $P(x, y)$ maka $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \alpha = \arctan \frac{y}{x}$

Mengubah koordinat kutub ke koordinat cartesian.

Jika $P(r, \alpha)$ maka $x = r \cos \alpha$ dan $y = r \sin \alpha$

6. Fungsi trigonometri adalah fungsi yang periodik, hal ini disebabkan grafik fungsi trigonometri akan berulang setelah batas tertentu. Setiap fungsi trigonometri mempunyai perioditas yang berbeda.

7. Persamaan trigonometri adalah persamaan yang variabelnya terkandung di dalam trigonometri. Penyelesaian persamaan trigonometri adalah suatu nilai pengganti variabel yang apabila disubstitusikan ke dalam persamaan trigonometri tersebut, maka persamaan trigonometri itu menjadi bernilai benar.

8. Sudut-Sudut berelasi

Relasi α dan $(90^\circ - \alpha)$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\tan(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$	Relasi α dan $(270^\circ - \alpha)$	$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \tan \alpha$
Relasi α dan $(90^\circ + \alpha)$	$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$	Relasi α dan $(270^\circ + \alpha)$	$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$ $\tan(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\tan \alpha$
Relasi α dan $(180^\circ - \alpha)$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	Relasi α dan $(360^\circ - \alpha)$	$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
Relasi α dan $(180^\circ + \alpha)$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	Relasi α dan $(-\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

9. Identitas trigonometri merupakan pembuktian dua buah persamaan trigonometri. Pembuktian identitas trigonometri dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu sebagai berikut:
- mengubah ruas kiri sehingga sama dengan ruas kanan
 - mengubah ruas kanan sehingga sama dengan ruas kanan
 - ruas kiri dan ruas kanan diubah sehingga menjadi pernyataan yang sama
10. Pada $\triangle ABC$ yang sudut-sudutnya A , B , dan C serta sisi-sisi di hadapan sudut tersebut berturut-turut adalah a , b , dan c berlaku:

Aturan Sinus	Aturan Kosinus	Luas Segitiga
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$L = \frac{1}{2} bc \sin A$ $L = \frac{1}{2} ac \sin B$ $L = \frac{1}{2} ab \sin C$

Ujilah pemahamanmu dengan mengerjakan Kuis 6 di halaman 338.

Mukadimah

Dalam klasifikasi para ulama agung (the great scholars), tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. dibedakan menjadi dua kelompok utama. Yaitu, ayat-ayat Kauniyah (acquired signs) dan ayat-ayat Qur'aniyah (transmitted signs). Kedua kelompok ayat ini, satu sama lain saling melengkapi (complementary) dan tidak saling mengingkari. Dengan ungkapan lain, bisa dikatakan bahwa ayat-ayat Qur'aniyah merupakan petunjuk manual (manual book) dari cara kerja alam raya, sedangkan ayat-ayat Kauniyah merupakan medan eksperimentasi dari segala informasi yang disampaikan oleh Al-quran. Hal ini tampak jelas dalam berbagai keterangan yang disampaikan oleh Allah Swt, Sang Pemilik semesta.

Misalnya, dalam Q.S. Fushshilat ayat 53 dinyatakan bahwa "Kami akan memperlihatkan kepada mereka tanda-tanda (kekuasaan) Kami di segenap ufuk dan pada diri mereka sendiri, sehingga jelaslah bagi mereka bahwa Al-quran itu benar...". Dengan begitu, segala hal yang ada di permukaan langit-Bumi pada dasarnya adalah wujud dan bukti kekuasaan Allah (manifestation of God), termasuk juga segala hal yang melekat pada diri manusia.

Bahkan jika diteliti lebih mendalam lagi, dalam Al-quran Surat Yamus ayat 5, dinyatakan bahwa, "Dia yang menjadikan Matahari terang cemerlang, dan Bulan bercahaya terang, dan ditetapkan-Nya waktu-waktunya, supaya kamu dapat mengetahui bilangan tahun dan perhitungan." Meskipun Al-quran bisa dikatakan bukan merupakan buku ilmiah ataupun buku ilmu pengetahuan, namun Alquran tidak anti ilmu pengetahuan. Alquran sangat mendorong manusia untuk terus mau menggali segala rahasia Ilahi yang menjadi modal pendorong bekerjanya semesta raya.

Dengan demikian, perkembangan pesat dalam disiplin ilmu astronomi, astrologi, matematika, biologi, dan lain sebagainya, mendapatkan pembenaran ilahi, sebab telah disediakan bahan material dan potensinya oleh Allah Swt. Berkaitan dengan disiplin ilmu matematika umpamanya, dengan jelas Allah menuliskannya dalam Alquran surat As-Sajdah ayat 4 yang berbunyi: "Allah yang menciptakan langit dan Bumi dan apa yang di antara keduanya dalam enam hari..."

Dalam ayat ini, ada hitungan matematis yang dapat disimpulkan untuk dipelajari secara lebih mendalam lagi. Lebih jauh dari itu, bukan cuma diizinkan melakukan eksperimentasi di pelosok bumi saja, Allah Swt. pun memberi kebebasan manusia untuk berkembang pesat hingga mampu "menembus" langit dan Bumi, sebagaimana yang telah dinyatakan di dalam QS. Ar-Rahman ayat 33, "Wahai sekalian jin dan manusia kalau kamu sanggup melintasi penjuru langit dan Bumi, lintasilah. Kamu tidak akan sanggup melintasinya, melainkan dengan kekuasaan (pengetahuan)."

Dan semua itu hanya akan bisa diambil manfaatnya oleh orang-orang yang beriman, yaitu kalangan Ulul Abshar (orang-orang yang mempunyai mata batin suci), seperti yang dinyatakan dalam QS. Ali Imran ayat 190-191, "Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan Bumi, dan dalam pergantian siang dan malam, terdapat tanda (kekuasaan Allah) bagi Ulul Albab, ialah orang-orang yang senantiasa mengingat Allah ketika berdiri dan duduk, serta ketika berbaring, dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan Bumi."



Dengan demikian, semesta raya merupakan medan kompetisi yang paling adil bagi setiap individu untuk mendapatkan penilaian yang objektif dari Zat Yang Maha Adil (*al-'Adh*). Karenanya, tidak salah jika kemudian Nabi Muhammad Saw. bersabda kepada istrinya, Aisyah, "Pahalamu bergantung pada usaha maksimalmu [*Ajruki 'ala qadr nashabiki*]." Bahkan di lain kesempatan, begitu tegasnya Allah Swt. menyatakan adanya keharusan bagi setiap individu untuk saling berlomba dalam memaksimalkan jarak hidup yang pendek ini, juga ruang bumi Allah Swt. yang begitu luas ini dalam kebajikan, sebagaimana yang ada di dalam surat al-Baqarah ayat 148 dan al-Ma'idah ayat 48.

Karena itu, dengan tepat Rasulullah Saw. memberikan panduan yang detail dalam rangka memberikan arahan yang komplit untuk menjadi seorang peserta 'lomba kehidupan' yang sukses di dunia dan akhirat sebagai berikut ini, "Sesungguhnya Allah tidak akan melihat pada kekayaan dan fisik kalian, namun Ia akan melihat pada nilai ketulusan dan volume kebajikan kalian. [*Inna Allah laa yandzuru ila shuwarikum wa la ajsanikum, wa lakinna Allah yandzuru ila qulubikum wa a'malikum*]." Inilah yang menjadi rambu-rambu 'lomba kehidupan' yang harus dicermati dengan saksama.

Wallahu a'lam bi ash-Shawwab

7



Sumber: <http://www.google.com>

BANGUN RUANG DI SEKITAR KITA

Manfaat:

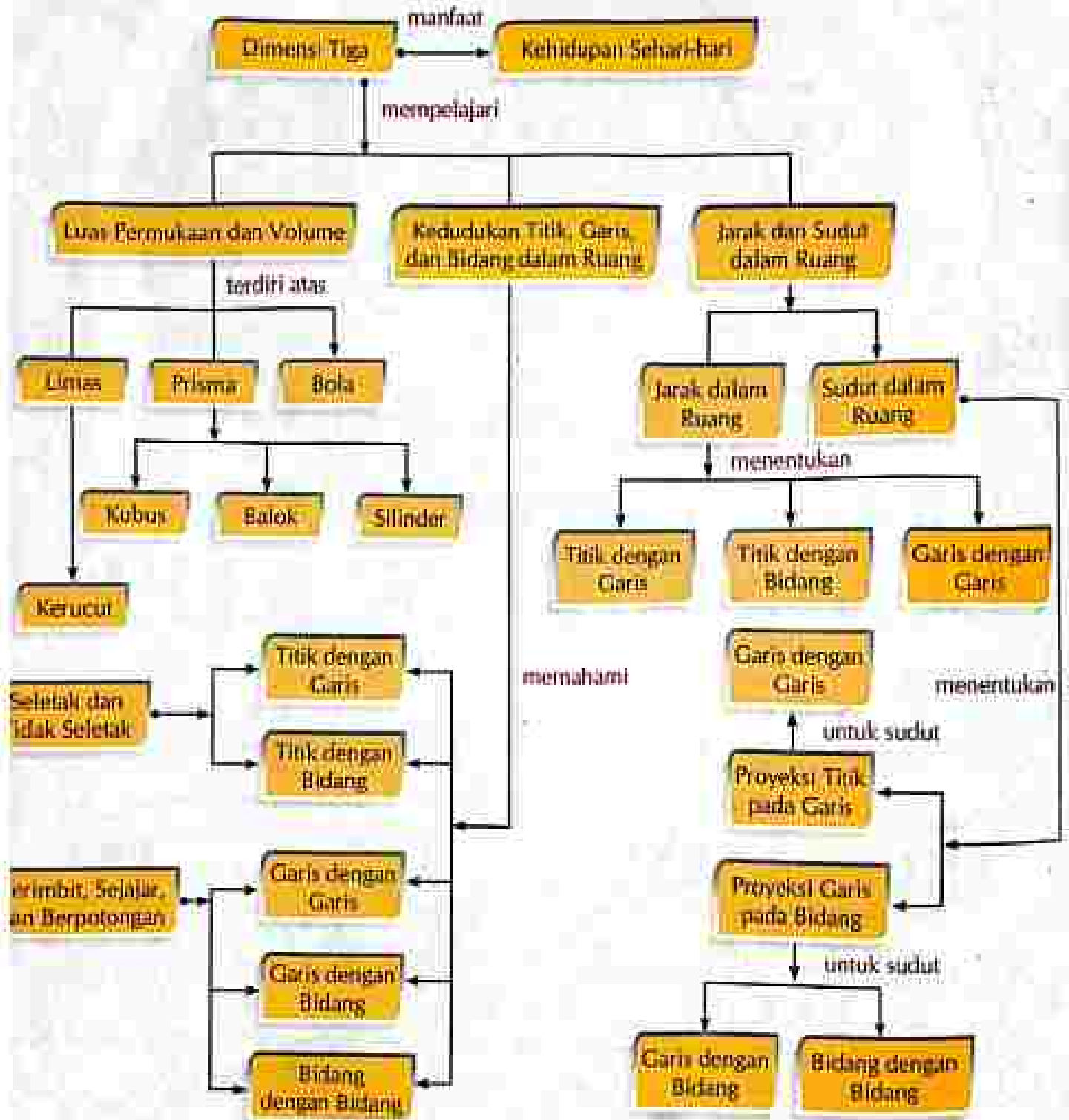
Mempelajari materi pada bab ini akan meningkatkan kemampuan spasial, analisis, dan ketelitianmu. Selain itu, kamu akan dapat menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berhubungan dengan dimensi ruang.

Kata kunci: luas, volume, titik garis, dan bidang

The Great Pyramid dibangun di Mesir pada tahun 2800 sebelum masehi pada masa pemerintahan **Raja Cheops**. Dasar piramida tersebut berbentuk persegi. Panjang sisinya 756 kaki dan tinggi dari sisi sampingnya sama dengan 611 kaki. Dapatkah kalian menentukan luas permukaan dan volume piramida tersebut (dalam meter)?

Permasalahan di atas merupakan salah satu permasalahan dimensi tiga yang dapat kalian temui walaupun dengan objek dan situasi yang berbeda.

MIND MAP



A. Ruang Dimensi Tiga

Berbicara tentang ruang dimensi tiga biasanya diartikan dengan bangun ruang. Bangun ruang adalah sebuah bangun yang memiliki luas dan volume. Bangun ruang terbagi menjadi 3, yaitu prisma, limas, dan bola. Berikut pembahasan ketiganya:

Sumber gambar: <http://id.bolapedia.org>

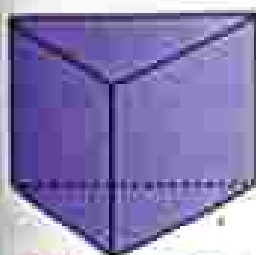
1. Prisma

a. Pengertian Prisma

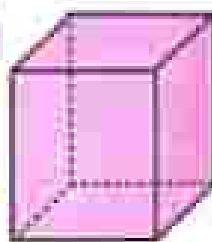
Prisma adalah suatu bangun ruang yang bidang alas dan atasnya saling sejajar dan kongruen. Ada dua sifat yang selalu dimiliki prisma, yaitu sebagai berikut.

1. Bidang alas dan atasnya saling sejajar dan kongruen
2. Rusuk-rusuk tegaknya selalu sejajar dan sama panjang

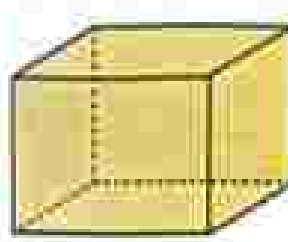
Berikut beberapa bangun ruang yang termasuk prisma.



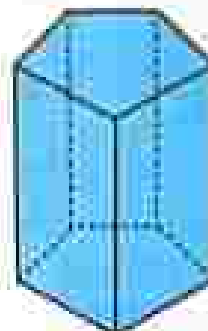
Prisma segitiga



Kubus



Balok



Prisma segi lima



Tabung/silinder

b. Unsur-Unsur Prisma

Perhatikan prisma segi lima beraturan $ABCDEF GHIJ$ berikut.



Bidang alas $\rightarrow$ $ABCDE$

Bidang atas $\rightarrow$ $FGHIJ$

Selisi prisma $\rightarrow$ $ABGF$, $BCGH$, $CDIH$, $DEJI$, dan $ARJF$

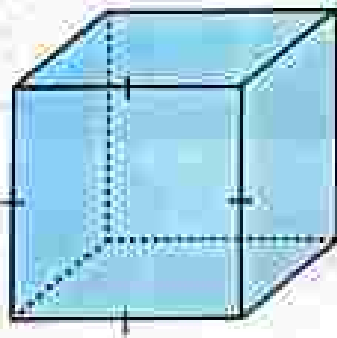
Diagonal sisi, di antaranya adalah $\rightarrow$ BF , AD , FI , dan CI

Diagonal ruang, di antaranya adalah $\rightarrow$ DF dan DG

Bidang diagonal, di antaranya adalah $\rightarrow$ $ADIF$

2. Kubus

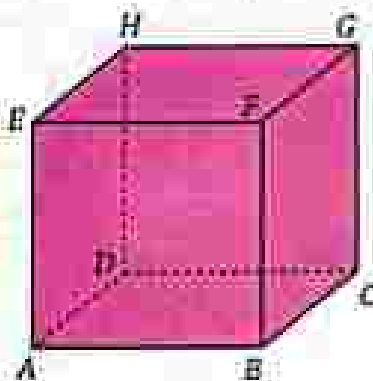
a. Pengertian Kubus



Kubus adalah suatu benda yang dibatasi oleh enam daerah persegi yang kongruen. Kubus disebut juga *heksaeder*.

b. Unsur-Unsur Kubus

Perhatikan kubus $ABCD.EFGH$ berikut.



Sisi-sisi kubus:

Sisi horizontal

Sisi vertikal

Rusuk-rusuk kubus:

Rusuk horizontal

Rusuk vertikal

Titik-titik pojok kubus

Diagonal sisi

Diagonal ruang

Bidang diagonal

▶ $ABCD$ dan $EFGH$

▶ $ABFE$, $DCGH$, $BCGF$, dan $ADHE$

▶ AB , BC , CD , AD , EF , FG , GH , dan HE

▶ AE , BF , CG , dan DH

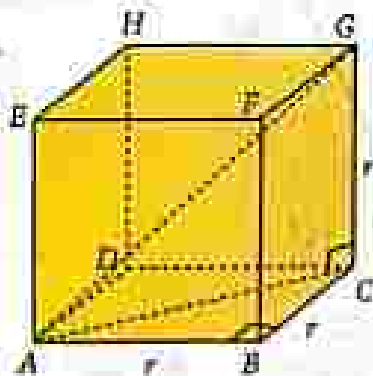
▶ A , B , C , D , E , F , G , dan H

▶ AC , BD , EG , FH , AH , ED , BG , CF , AF , BE , CH , dan DG

▶ AG , BH , CE , dan DF

▶ $ACGE$, $BDHF$, $ADGF$, $BCHE$, $CDEF$, dan $ABGH$

Pada gambar kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk r satuan berikut.



Diagonal sisi, misalnya AC , memiliki panjang sebagai berikut.

Pada gambar, terlihat bahwa $\triangle ABC$ adalah segitiga siku-siku di B , sesuai dengan dalil Pythagoras maka

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

Secara umum, jika terdapat kubus dengan panjang rusuk r satuan maka

$$\text{Diagonal sisinya} = r\sqrt{2}$$

Diagonal ruang, misalnya AG , memiliki panjang sebagai berikut.

Pada gambar, terlihat bahwa $\triangle ACG$ adalah segitiga siku-siku di C . Sesuai dengan dalil Pythagoras

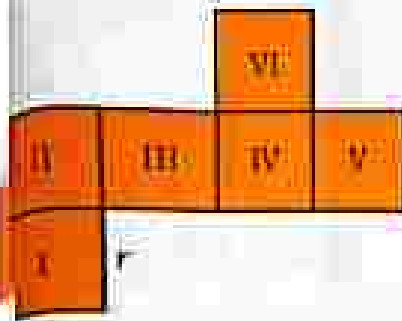
$$\text{maka } AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{(r\sqrt{2})^2 + r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}.$$

Secara umum, jika terdapat kubus dengan panjang rusuk r satuan maka

$$\text{Diagonal ruang kubus} = r\sqrt{3}$$

Luas Permukaan Kubus

Jika diketahui kubus dengan panjang rusuk r satuan maka jaring-jaring penyusun kubusnya dapat dinyatakan seperti gambar berikut.



Kubus tersusun dari 6 persegi sehingga luas permukaan kubus akan sama dengan jumlah luas keenam persegi tersebut.

$$\begin{aligned}\text{Luas permukaan kubus} &= \text{Luas I} + \text{Luas II} + \text{Luas III} + \text{Luas IV} + \text{Luas V} + \text{Luas VI} \\ &= (r \times r) + (r \times r) + (r \times r) + (r \times r) + (r \times r) + (r \times r) \\ &= r^2 + r^2 + r^2 + r^2 + r^2 + r^2 \\ &= 6r^2\end{aligned}$$

Secara umum, jika diketahui kubus dengan panjang rusuk r satuan maka:

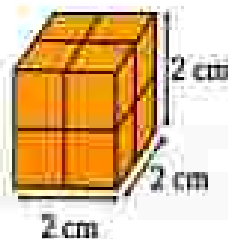
$$\text{Luas permukaan kubus} = 6r^2$$

Volume Kubus

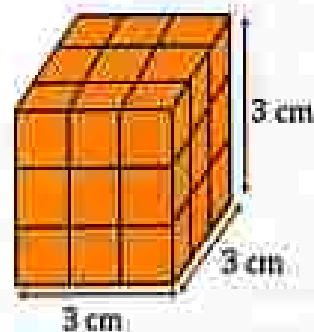
Dalam pengukuran luas, kita menggunakan kuadrat dalam satuan pengukurannya, misalnya 1 cm^2 . Pada volume, satuan pengukuran yang digunakan adalah kubik, misalnya 1 cm^3 . Kubus yang mempunyai panjang rusuk 1 cm mempunyai luas 1 cm^2 . Pada susunan 8 kubus dengan masing-masing rusuknya mempunyai panjang 1 cm , kita bisa mendapatkan kubus baru dengan panjang rusuk 2 cm dengan volume yang sama, yaitu 8 cm^3 . Kita juga dapat menyusun 27 kubus dengan masing-masing rusuknya mempunyai panjang 1 cm . Dari kubus tersebut, didapat kubus baru dengan panjang rusuk 3 cm dan volumenya 27 cm^3 .



$$V = 1 \text{ cm}^3$$



$$V = 8 \text{ cm}^3$$



$$V = 27 \text{ cm}^3$$

Secara umum, jika diketahui kubus dengan panjang rusuk r satuan maka:

$$\text{Volume kubus} = r^3$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Seorang perajin membuat kaca yang berbentuk kubus dengan rusuk 5 cm. Bagaimana cara menentukan luas permukaan dan volume kaca tersebut?

Jawab:

Untuk mengetahuinya, pelajariilah uraian berikut.

Diketahui rusuk (r) = 5 cm

Luas permukaan kubus = $6r^2 = 6(5)^2 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ cm}^2$

Volume kubus = $r^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

Jadi, luas permukaan kaca adalah 150 cm^2 dan volume kubus 125 cm^3 .



Sumber: www.4mat.com

Tanya:

Luas permukaan sebuah kubus sama dengan 384 cm^2 . Jika rusuk kubus menyusut 1 cm, berapakah volume kubus setelah menyusut?

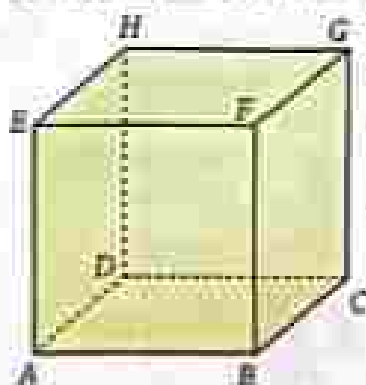
Jawab:

Luas permukaan kubus = $6r^2 = 384 \rightarrow r^2 = 64 \rightarrow r = 8 \text{ cm}$

menyusut 1 cm jadi $r = 7 \text{ cm}$ sehingga volume kubus = $r^3 = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$.

Tanya:

Jika volume kubus ABCD EFGH berikut sama dengan $16\sqrt{2}$, berapakah panjang DF?



Jawab:

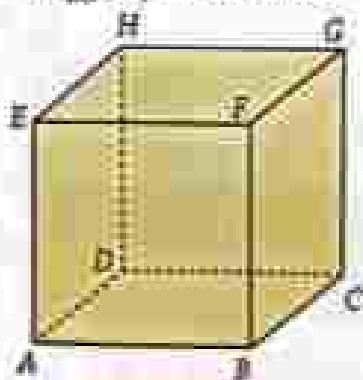
$$V_{\text{kubus}} = r^3 = 16\sqrt{2} \rightarrow r = (16\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = \left(2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

DF adalah diagonal ruang = $r\sqrt{3} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

Jadi, panjang DF adalah $2\sqrt{6}$.

Tanya:

Setengah bagian dari sebuah bejana berbentuk kubus yang terbuat dari plat tipis berisi zat cair. Jika ditambahkan 37,5 liter zat cair lagi maka bejana tersebut akan berisi $\frac{4}{5}$ bagian. Berapakah tinggi bejana tersebut?



Jawab:

Misalkan, $V_{\text{total bejana}} = r^3 \text{ dm}^3$ (1 liter = 1 dm^3)

$$V_{\text{bejana mula-mula}} = \frac{1}{2} r^3 \text{ dm}^3$$

$V_{\text{bejana setelah ditambah zat cair}}$

$$\frac{1}{2} r^3 + 37,5 = \frac{4}{5} r^3 \rightarrow \frac{3}{10} r^3 = 37,5$$

$$r^3 = 125 \rightarrow r = 5$$

Jadi, tinggi bejana adalah 5 dm.

GO TO THE SOURCE

Selamat datang di sumber belajar matematika. Sumber belajar ini menyediakan materi matematika untuk siswa SMP/MTsN kelas VII. Materi ini dapat digunakan sebagai referensi atau sebagai sumber belajar untuk kegiatan pembelajaran. Materi ini dapat digunakan sebagai sumber belajar untuk kegiatan pembelajaran. Materi ini dapat digunakan sebagai sumber belajar untuk kegiatan pembelajaran.



Sumber: www.dinamika.com

ASAHI OTAK

KUBUS

- Mardi membeli kotak kado kecil berbentuk kubus. Jika panjang rusuk kado tersebut 6 cm, dapatkah kamu menentukan:
 - luas permukaan kotak kado, dan
 - volume kotak kado tersebut
- Panjang diagonal ruang sebuah kubus = $4\sqrt{3}$ cm. Jika panjang rusuk kubus bertambah 1, tentukan luas permukaannya.
- Sebuah kubus tanpa tutup mempunyai panjang rusuk 5 cm. Tentukan luas permukaan kubus tersebut.
- Sebuah kubus memiliki luas permukaan 486 cm^2 . Tentukan diagonal sisi dan diagonal ruangya.
- Volume kubus sama dengan 343 cm^3 . Tentukan luas permukaan kubus tersebut.
- Luas permukaan kubus sama dengan 384 cm^2 . Jika kubus menyurut 2 cm, tentukan volume kubus tersebut.
- Bu Marni adalah penjual kue. Bu Marni membuat kue-kue berbentuk kubus dengan panjang rusuk-rusuknya 4 cm. Kue-kue tersebut akan dimasukkan ke dalam dus makanan berbentuk kubus dengan panjang rusuk 20 cm. Tentukan:
 - berapa jumlah maksimal kue yang dapat dimasukkan ke dalam dus tersebut?
 - jika harga 1 kue adalah Rp1.500,00, tentukan harga 1 dus kue tersebut.
- Sebuah bak mandi berbentuk kubus dengan panjang rusuk 80 cm. Bak mandi tersebut akan diisi air $\frac{3}{4}$ dari volume bak mandi dengan menggunakan air kran. Adapun sisa dari bak tersebut akan diisi dengan menggunakan ember berbentuk kubus dengan panjang rusuk 15 cm.
 - Tentukan volume air yang diperlukan.
 - Pada pengisian ke berapakah (oleh ember) bak tersebut akan penuh?



Sumber: www.dinamika.com



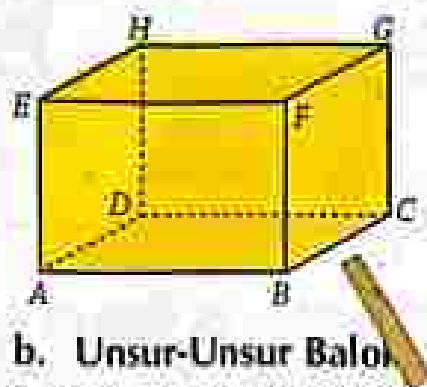
Sumber: <http://112.photoshot.net>



Sumber: Dokumentasi pribadi

3. Balok

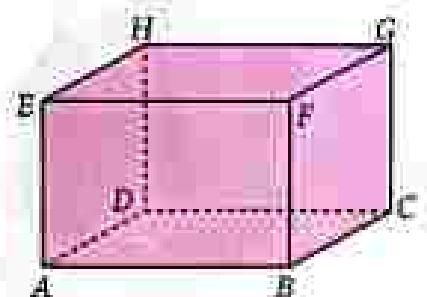
a. Pengertian Balok



Balok adalah suatu benda yang dibatasi oleh enam daerah persegi panjang.

b. Unsur-Unsur Balok

Perhatikan balok ABCD.EFGH berikut.



Sisi-sisi balok

Sisi horizontal

▶ ABCD dan EFGH

Sisi vertikal

▶ ABFE, DCGH, BCGF, dan ADHE

Rusuk-rusuk balok

Rusuk horizontal

▶ AB, BC, CD, AD, EF, FG, GH, dan HE

Rusuk vertikal

▶ AE, BF, CG, dan DH

Titik-titik pojok balok

▶ A, B, C, D, E, F, G, dan H

Diagonal sisi

▶ AC, BD, EG, FH, AH, ED, BG, CF, AF, BE, CH, dan DG

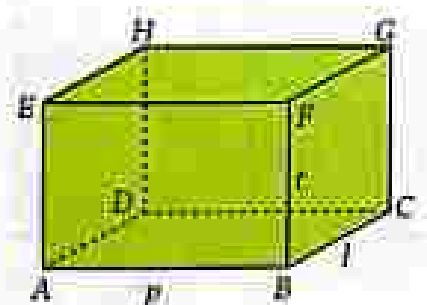
Diagonal ruang

▶ AG, BH, CE, dan DF

Bidang diagonal

▶ ACGE, BDHF, ADGF, BCHE, CDEF, dan ABGH

Perhatikan gambar balok ABCD.EFGH dengan panjang p , lebar l , dan tinggi t satuan berikut.



Diagonal sisi, misalnya AC, memiliki panjang sebagai berikut. Pada gambar terlihat bahwa segitiga ABC adalah segitiga siku-siku di B, sesuai dengan dalil Pythagoras maka

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{p^2 + l^2}$$

Secara umum, jika terdapat balok dengan panjang p , lebar l , dan tinggi t satuan maka

$$\text{Diagonal sisinya} = \sqrt{p^2 + l^2}$$

Diagonal ruang, misalnya AG, memiliki panjang sebagai berikut.

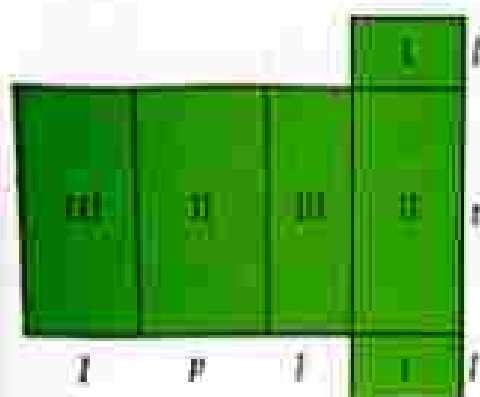
Pada gambar, terlihat bahwa $\triangle ACG$ adalah segitiga siku-siku di C. Sesuai dengan dalil Pythagoras maka $AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$

Secara umum, jika terdapat kubus dengan panjang p , lebar l , dan tinggi t satuan maka

$$\text{Diagonal ruangnya} = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

c. Luas Permukaan Balok

Jika diketahui balok dengan panjang p , lebar l , dan tinggi t satuan maka jaring-jaring penyusun baloknya dapat dinyatakan seperti gambar berikut.



Balok yang tersusun dari 3 pasang persegi panjang, sehingga luas permukaan balok akan sama dengan dua kali jumlah luas ketiga persegi panjang tersebut.

Luas permukaan balok

$$= 2 \times (\text{Luas I} + \text{Luas II} + \text{Luas III})$$

$$= 2 \times ((p \times l) + (p \times t) + (l \times t))$$

Secara umum, jika diketahui balok dengan panjang p , lebar l , dan tinggi t satuan maka

$$\text{Luas permukaan balok} = 2 \times ((p \times l) + (p \times t) + (l \times t))$$

d. Volume Balok

Dua atau lebih kubus dapat disusun menjadi sebuah balok. Jika sebuah balok disusun dari 2 kubus yang bervolume 1 cm^3 maka volume baloknya sama dengan 2 cm^3 . Jika sebuah balok disusun dari 24 kubus yang bervolume 1 cm^3 maka volume baloknya 24 cm^3 .

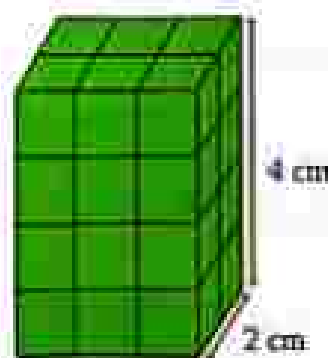
Perhatikan gambar berikut.



$$V = 1 \text{ cm}^3$$



$$V = 2 \text{ cm}^3$$



$$V = 24 \text{ cm}^3$$

Secara umum, jika diketahui balok dengan panjang p , lebar l , dan tinggi t satuan maka

$$\text{Volume balok} = p \times l \times t$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Sebuah balok ABCD.EFGH mempunyai volume sama dengan 192 cm^3 .

Jika perbandingan panjang : lebar : tinggi = 2 : 3 : 4, berapakah panjang balok tersebut?

Jawab:

Misalkan, panjang = $2y \text{ cm}$, lebar = $3y \text{ cm}$, dan tinggi = $4y \text{ cm}$

$$V_{\text{balok}} = p \times l \times t$$

$$192 = 2y \times 3y \times 4y$$

$$192 = 24y^3$$

$$y^3 = 8 \rightarrow y = 2$$

Jadi, panjang balok = $2 \cdot (2) = 4 \text{ cm}$.

Tanya:

Sebuah balok mempunyai panjang 12 cm, lebar 9 cm, dan volume = 864 cm^3 . Berapakah panjang diagonal ruang tersebut?

Jawab:

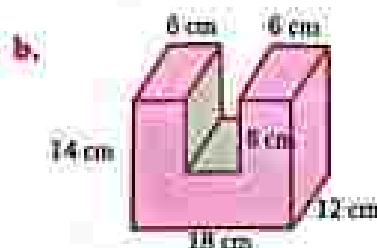
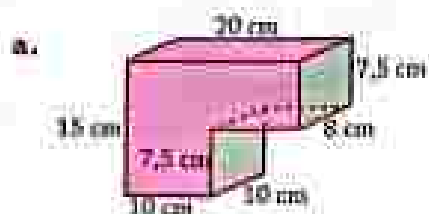
$$V_{\text{balok}} = p \times l \times t = 12 \times 9 \times t = 864 \rightarrow t = 8$$

$$\text{Diagonal ruang} = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2} = \sqrt{144 + 81 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$$

Jadi, panjang diagonal ruang = 17 cm.

ASAH OTAK BALOK

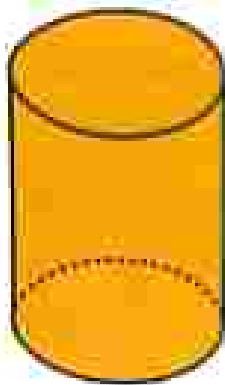
- Diketahui balok ABCD.EFGH dengan $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, dan $BF = 24 \text{ cm}$, tentukan:
 - panjang diagonal ruang
 - luas permukaan balok
 - volume balok
- Diketahui luas permukaan sebuah balok = 130 cm^2 . Jika alas balok berbentuk persegi dan tinggi balok = 4 cm, tentukan volume balok.
- Tentukan volume dari tiap bangun berikut.



- Tahukah kamu? Cokelat batangan terbesar yang tercatat di buku rekor Guinness pernah ditampilkan di Plaza Singapura. Cokelat tersebut ditampilkan dalam rangka Festival Makanan Singapura tahun 2006. Cokelat tersebut berbentuk balok dengan panjang 3.020 cm, lebar 1.060 cm, dan tinggi 725 cm.
 - Tentukan volume cokelat tersebut.
 - Kaca untuk menampung cokelat tersebut masing-masing 30 cm lebih dari ukuran cokelat yang sebenarnya. Tentukan luas permukaan kaca tersebut.

4. Silinder (Tabung)

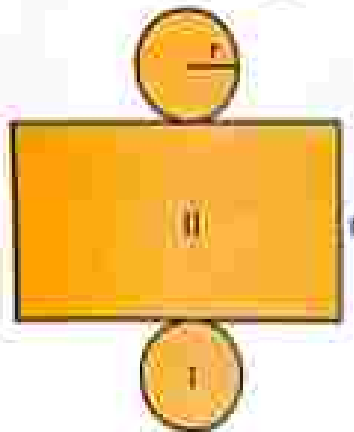
a. Pengertian Silinder



Silinder atau tabung adalah bangun ruang beraturan yang bidang alas dan bidang atasnya merupakan lingkaran yang saling sejajar dan kongruen.

b. Luas Permukaan Silinder

Jika diketahui silinder dengan jari-jari r dan tinggi t satuan maka jaring-jaring penyusun silindernya dapat digambarkan sebagai berikut.



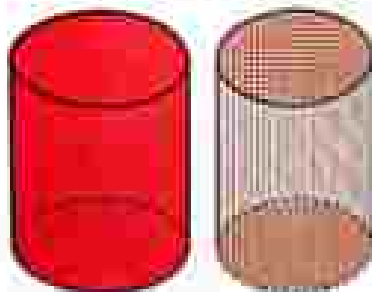
$$\begin{aligned}\text{Luas Permukaan Silinder} &= 2 \times \text{Luas I} + \text{Luas II} \\ &= 2 \times \pi r^2 + 2\pi r \times t \\ &= 2(\pi r^2 + 2\pi r t)\end{aligned}$$

Secara umum, jika diketahui silinder dengan jari-jari r dan tinggi t satuan maka

$$\text{Luas permukaan silinder} = 2(\pi r^2 + 2\pi r t)$$

c. Volume Silinder

Misalkan, alas silinder adalah lingkaran berjari-jari r dan tinggi silinder adalah t . Jika alas silinder tersebut terdiri atas persegi yang berukuran sangat kecil maka silinder terdiri atas sekumpulan balok yang tingginya t dan jumlah luas alasnya sama dengan luas alas silinder (πr^2).



Oleh karena volume seluruh balok $= \pi r^2 t$ maka volume seluruh balok sama dengan volume silinder itu sendiri sehingga secara umum ditulis

$$\text{Volume silinder} = \pi r^2 t$$

Notes

Menentukan luas permukaan dan volume pada kubus, balok, dan silinder; di mana kerangannya terdapat prisma maka volume dan luas permukaan prisma secara umum ditulis

$$\text{Volume prisma} = \text{Luas alas} \times \text{tinggi}$$

$$\text{Luas permukaan prisma} = 2 \times \text{Luas alas} + \text{Luas selimut}$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Sebuah silinder mempunyai volume 4,71 liter dan tinggi 15 cm. Jika $\pi = 3,14$, tentukan jari-jari alas silinder.

Jawab:

$$\text{Volume silinder} = 4,71 \text{ liter} = 4710 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volume silinder} = r^2 \times \pi \times t = 3,14 \times r^2 \times 15 = 4710 \rightarrow r^2 = 100 \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

Tanya:

Tentukan luas permukaan dan volume silinder, jika tingginya sama dengan 10 cm dan jari-jari alasnya sama dengan 7 cm. ($\pi = 3,14$).

Jawab:



Luas permukaan silinder:	Volume silinder:
$= 2 (\pi r^2 + \pi r t)$	$= \pi r^2 t$
$= 2 (\pi 7^2 + \pi \cdot 7 \times 10) \text{ cm}^2$	$= \pi 7^2 \times 10 \text{ cm}^3$
$= 238 \pi \text{ cm}^2$	$= 490 \pi \text{ cm}^3$
$= 747,689 \text{ cm}^2$	$= 1539,3804 \text{ cm}^3$



MATH AROUND US

Pada umumnya, tenda militer berbentuk setengah silinder. Biasanya digunakan untuk tempat koordinasi pasukan/tentara. Dapat juga digunakan sebagai barak atau tempat istirahat pasukan. Diketahui diameter tenda tersebut 350 cm dan panjang tenda adalah 500 cm. Dapatkah kamu menentukan luas permukaan tenda tersebut? Caranya adalah sebagai berikut.

$$\text{Jari-jari tabung} = \frac{8}{2} \cdot \text{diameter} = 175 \text{ cm}$$

$$\text{Tinggi tabung} = \text{panjang tenda} = 500 \text{ cm}$$

$$\text{Luas selimut tabung} = \frac{8}{2} \times 2 \pi r \times (r + t)$$

$$= \pi \cdot r \times (r + t)$$

$$= \frac{22}{8} \times 175 \text{ cm} \times (175 + 500)$$

$$= 350 \text{ cm} \times 675 \text{ cm} = 371.250 \text{ cm}^2 \text{ atau } 37,125 \text{ m}^2$$

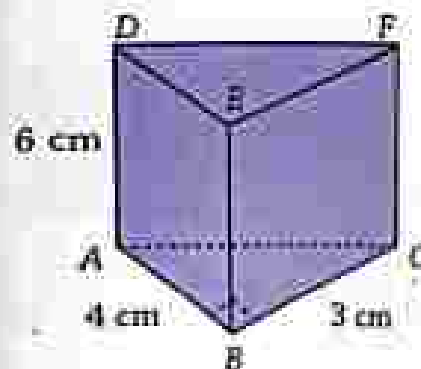


Sumber: www.alahadstructures.com

TANYA & JAWAB

Tanya:

Berapakah volume dan luas permukaan prisma segitiga siku-siku jika tinggi prisma sama dengan 6 cm dan sisi siku-siku alasnya sama dengan 4 cm dan 3 cm?



Jawab:

Misalkan, prisma tersebut adalah prisma ABC.DEF.

$$\text{Luas alas} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = \text{luas alas} \times \text{tinggi} = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Luas selimut} &= \text{keliling alas} \times \text{tinggi} \\ &= (AB + BC + AC) \times 6 = 12 \times 6 = 72 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas permukaan prisma} &= 2 \times \text{luas alas} + \text{luas selimut} \\ &= 2 \times 6 + 72 = 84 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ASAHI OTAK

SILINDER DAN PRISMA

- Diketahui silinder dengan jari-jari alasnya sama dengan 3 cm dan tingginya adalah 11 cm. Jika $\pi = 3,14$, tentukan:
 - luas permukaan silinder
 - volume silinder
- Sebuah tabung kimia berbentuk silinder. Tabung tersebut memiliki tebal 2 mm, jari-jari alas (permukaan luar) 10 mm, dan tinggi 300 mm. Jika tabung tersebut tidak mempunyai tutup, tentukan volume zat cair yang dimasukkan ke dalam tabung.
- Diketahui sebuah kubus dengan panjang rusuk 2 dm. Tentukan volume maksimum silinder yang dapat dimasukkan ke dalam kubus.
- Sebuah logam berbentuk balok dimasukkan ke dalam tabung yang berisi air. Jika balok itu berukuran 11 cm $\times$ 7 cm $\times$ 5 cm dan diameter alas tabung 28 cm, tentukan tinggi air yang naik.
- Diketahui prisma tegak ABC.DEF dengan AB = 6 cm, AC = 16 cm, AD = 14 cm, dan $\angle BAC = 60^\circ$. Tentukan luas selimut prisma.
- Sebuah kolam renang memiliki panjang 25 m, lebar 10 m, yang paling dangkal 1 m, dan yang paling dalam 4 m. Berapakah volume kolam renang tersebut?



Banner: CD image

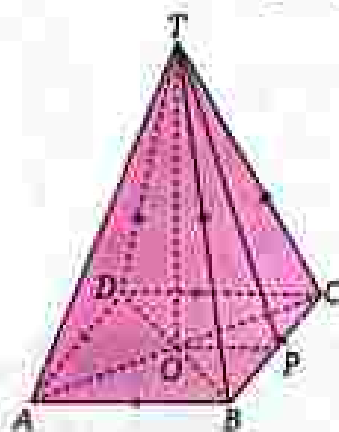
5. Limas

a. Pengertian Limas

Limas adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh segi- n dan beberapa segitiga yang melalui sebuah titik di luar segi- n tersebut. Titik tersebut disebut puncak, bidang-bidang segitiga tersebut disebut sisi tegak, dan segi- n disebut alas dari limas itu.

b. Unsur-Unsur Limas

Perhatikan limas segiempat beraturan $T.ABCD$ berikut.



Titik T disebut puncak limas.

Bidang $ABCD$ disebut alas.

Bidang TAB , TBC , TCD , dan TAD disebut sisi tegak.

Bidang $ABCD$, TBC , TCD , dan TAD disebut bidang batas.

AB , BC , CD , dan AD disebut rusuk-rusuk alas.

TA , TB , TC dan TD disebut rusuk-rusuk tegak.

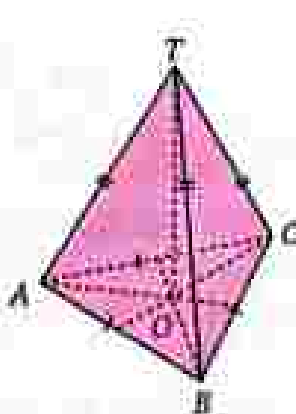
Bidang TAC dan TBD disebut bidang-bidang diagonal.

TO disebut tinggi limas, dengan TO tegak lurus pada bidang alas.

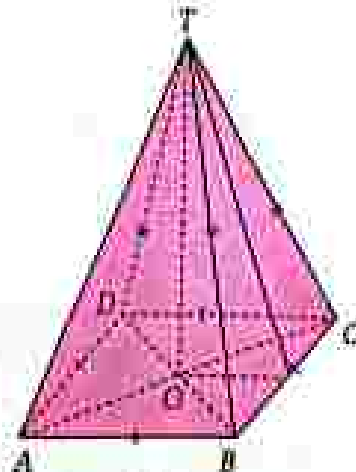
TP disebut apotema, dengan TP tegak lurus rusuk alas.

c. Jenis-jenis Limas

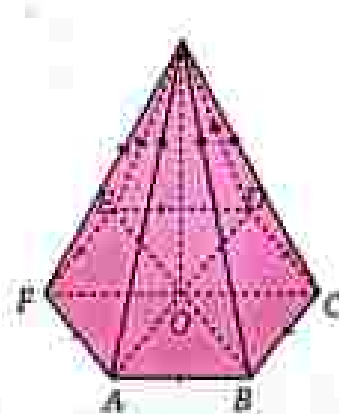
Limas beraturan: limas yang berbentuk segi- n beraturan dan proyeksi titik puncaknya berimpit dengan titik pusat bidang alas, berikut beberapa contoh limas beraturan.



limas segi-3 beraturan

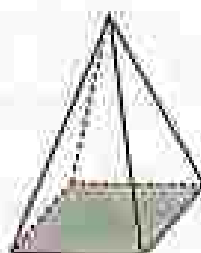


limas segi-4 beraturan



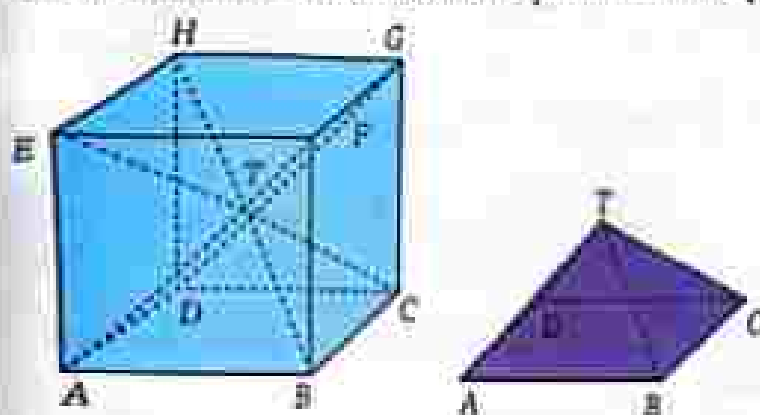
limas segi-6 beraturan

Limas sembarang: limas yang alasnya berbentuk segi- n sembarang dan titik puncaknya sembarang. Berikut beberapa contoh limas sembarang.



d. Volume dan Luas Permukaan Limas

Untuk menentukan volume dan luas permukaan limas perhatikan kubus $ABCD.EFGH$ berikut.



$$\begin{aligned} V \text{ limas } T.ABCD &= \frac{1}{6} \times \text{volume kubus } ABCD.EFGH \\ &= \frac{1}{6} \times \text{luas alas } ABCD \times \text{tinggi kubus} \end{aligned}$$

Karena tinggi kubus $ABCD.EFGH = 2 \times$ tinggi limas $T.ABCD$ maka

$$\begin{aligned} V \text{ limas } T.ABCD &= \frac{1}{6} \times \text{luas alas } ABCD \times 2 \times \text{tinggi limas} \\ &= \frac{1}{3} \times \text{luas alas } ABCD \times \text{tinggi limas} \end{aligned}$$

Secara umum, ditulis

$$V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

$$L_{\text{permukaan limas}} = \text{Luas alas} + \text{Luas selimut}$$



Sumber: www.kerbalindia.com

INFO MATEMATIKA

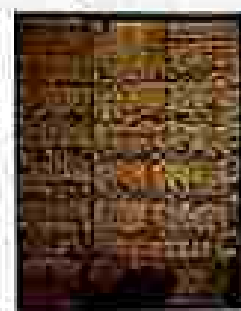


Sumber: www.magnapix.com

Bangsa Mesir Kuno menggunakan pengetahuan mereka mengenai bangun ruang untuk tujuan-tujuan yang praktis seperti pembangunan piramida. Ini merupakan prestasi yang luar biasa, mengingat bahwa saat itu mereka hanya memiliki matematika yang terbatas. Pada piramida Besar Khufu di Gizeh, rusuk-rusuk dasarnya berukuran 230 m (760 kaki), dan tingginya sekitar 146 m (480 kaki). Setiap sisinya harus miring pada sudut yang tepat agar keempat sisi piramida itu bertemu di puncaknya.

Gambar di samping adalah salah satu halaman dari Rhind Papyrus, ditulis sekitar tahun 1650 SM. Soal ke-56 pada Rhind Papyrus membuat acuan khusus tentang trigonometri sederhana dalam pembangunan piramida.

Kita mengetahui bahwa bangsa Mesir Kuno menghitung volume piramida sebagai $\frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$.



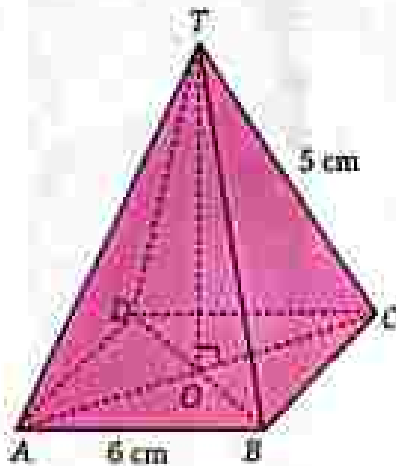
Sumber: www.magnapix.com

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui limas segiempat beraturan $TABCD$ dengan $AB = 6$ cm dan $TC = 5$ cm. Hitunglah:

- tinggi limas
- luas alas limas
- volume limas



Jawab:

- Tinggi limas adalah TO dan $\triangle TOC$ adalah segitiga siku-siku di O maka

$$TC^2 = TO^2 + CO^2$$

$$CO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$TO^2 = TC^2 - CO^2 = 5^2 - (3\sqrt{2})^2 \\ = 25 - 18 = 7 \rightarrow TO = \sqrt{7} \text{ cm}$$

Jadi, tinggi limas adalah $\sqrt{7}$ cm.

- Luas bidang alas limas $= AB \times BC = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$

$$c. V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{3} \times 36 \times \sqrt{7} = 12\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

Tanya:

Diketahui limas segitiga beraturan dan limas segiempat beraturan dengan panjang rusuk alas berbanding 1 : 2. Jika tinggi kedua limas sama, berapakah perbandingan volume kedua limas tersebut?

Jawab:

Limas segitiga beraturan

$$\begin{aligned} \text{Luas bidang alas} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{4} \sqrt{3} x^2 \end{aligned}$$

$$V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} x^2 \cdot t = \frac{1}{12} \sqrt{3} x^2 t$$

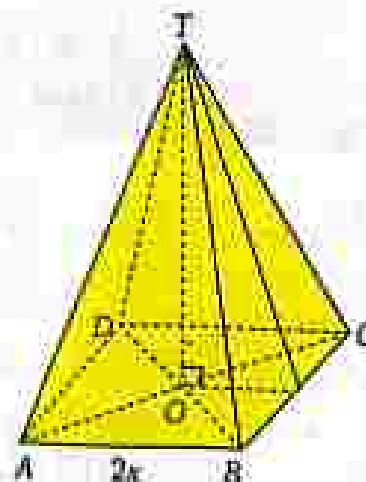
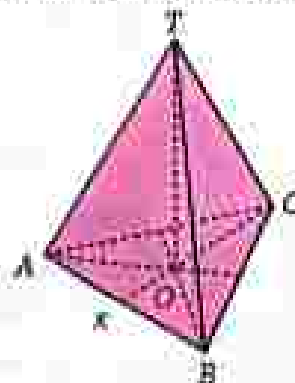
Limas segiempat beraturan

$$\text{Luas bidang alas} = AB \times BC = 2x \times 2x = 4x^2$$

$$V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{3} \times 4x^2 \times t = \frac{4}{3} x^2 t$$

Perbandingan volume kedua limas adalah

$$\frac{V_{\text{Limas segitiga beraturan}}}{V_{\text{Limas segiempat beraturan}}} = \frac{\frac{1}{12} \sqrt{3} x^2 t}{\frac{4}{3} x^2 t} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$



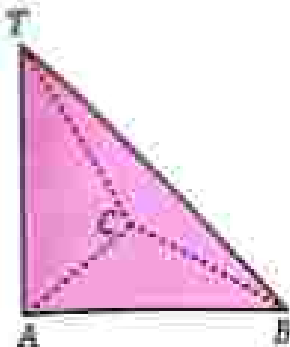
ASAH OTAK

LIMAS

1. $T.PQR$ adalah limas segitiga beraturan (bidang empat beraturan) dengan panjang rusuk sama dengan 6 cm. Tentukan:
 - a. luas permukaan limas
 - b. volume limas

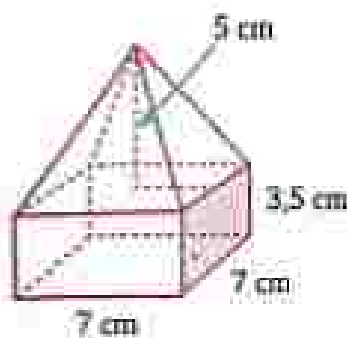
2. Diketahui limas $T.ABC$ dengan ABC merupakan segitiga sama sisi dengan $AB = 6$ cm, $TA = 7$ cm, dan TA tegak lurus segitiga ABC . Berapakah volume limas $T.ABC$?

3. Perhatikan limas segitiga tegak berikut.

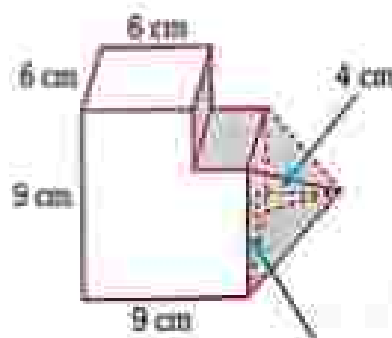


Diketahui TA tegak lurus AB , $TA = 10$ cm, $AB = 9$ cm, $AC = 5$ cm, dan $\angle BAC = 30^\circ$. Berapakah volume limas $T.ABC$?

4. Tentukan volume tiap bangun berikut.

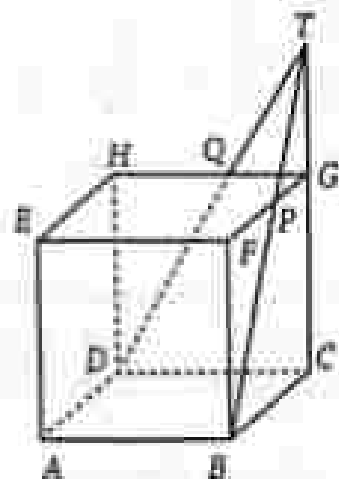


(a)



(b)

5. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 6 cm. Titik P dan Q berturut-turut terletak pada pertengahan FG dan HG . Perpanjangan garis BP , DQ , dan CG berpotongan pada titik T . Tentukan volume limas $T.BCD$.

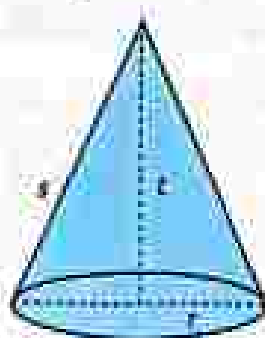


Source: www.compassion.com

6. Hasan dan ayahnya akan berkemah ke suatu tempat. Untuk itu, ia menyewa tenda seperti ditunjukkan pada gambar di samping. Hasan ingin mengetahui luas permukaan tenda tersebut. Dapatkah kamu mengetahui luas permukaan tenda tersebut? Berapakah luas permukaannya?

6. Kerucut

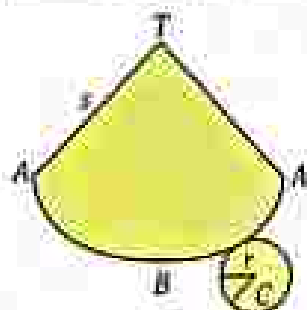
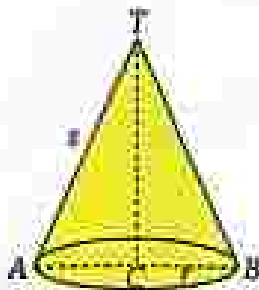
a. Pengertian Kerucut



Kerucut adalah bangun ruang beraturan yang mempunyai satu bidang alas berbentuk lingkaran dan satu titik puncak, serta selimutnya merupakan juring lingkaran yang bujuranya dilengkungkan secara mulus mengikuti alas.

b. Luas Permukaan Kerucut

Untuk menentukan luas permukaan kerucut, perhatikan gambar berikut.



$$\frac{\text{luas juring } TAA'}{\text{luas lingkaran } T} = \frac{\text{panjang busur juring } TAA'}{\text{keliling lingkaran } T}$$
$$= \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$$

$$\text{Luas juring } TAA' = \frac{r}{s} \times \text{luas lingkaran } T = \frac{r}{s} \times \pi s^2 = \pi rs$$

$$\begin{aligned}\text{Luas permukaan kerucut} &= \text{luas alas} + \text{luas selimut} \\ &= \pi r^2 + \pi rs \\ &= \pi r(r + s)\end{aligned}$$

Jadi, luas permukaan kerucut adalah

$$\text{Luas permukaan kerucut} = \pi r(r + s)$$

c. Volume Kerucut

Kerucut merupakan bentuk khusus dari limas, sehingga volume sama dengan volume dan luas permukaan limas.

Secara umum, ditulis

$$\text{Volume kerucut} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times t$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui diameter alas suatu kerucut = 16 cm dan panjang garis pelukisnya = 17 cm. Berapakah volume kerucut tersebut?

Jawab:

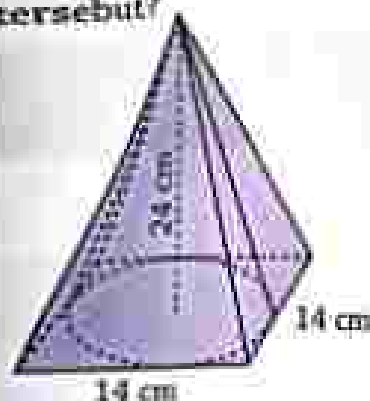
Diketahui: $d = 16$ cm sehingga $r = 8$ cm dan panjang garis pelukis (s) = 17 cm.

$$t = s^2 - r^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 \rightarrow t = 15$$

$$V_{\text{kerucut}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times t = \frac{1}{3} \pi \times 64 \times 15 = 320 \pi \text{ cm}^3.$$

Tanya:

Gambar berikut menunjukkan sebuah kerucut yang terletak dalam sebuah limas sedemikian sehingga keliling alas kerucut menyinggung rusuk alas limas dan titik puncak kerucut berimpit dengan titik puncak limas. Berapakah perbandingan volume kerucut dengan volume limas tersebut?



Jawab:

$$\text{Volume kerucut : Volume limas} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times t : \frac{1}{3} L \times t$$

$$= \pi r^2 \times t : L \times t$$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \right) : (14 \times 14 \times 24)$$

$$= \frac{22}{7} : 4 = \frac{11}{14} = 11 : 14$$

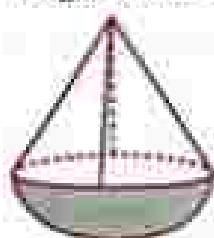
Jadi, perbandingannya 11 : 14.

ASAHI OTAK

KERUCUT

- Sebuah benda pejal berbentuk kerucut mempunyai tinggi sama dengan 4 cm dan jari-jari alas sama dengan 1,5 cm. Tentukan:
 - luas permukaan kerucut
 - volume kerucut
- Sebuah kerucut mempunyai volume 3.850 cm^3 dan jari-jari alas = 7 cm. Jika $\pi = \frac{22}{7}$, berapakah tinggi kerucut tersebut (dalam cm)?
- Diketahui bahwa sebuah silinder dan sebuah kerucut mempunyai alas dan tinggi yang sama. Jika jari-jari alas = 7 cm dan tinggi = 21 cm, berapakah perbandingan volume kerucut dengan volume silinder?

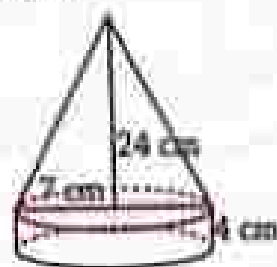
4.



Bangun ruang pada gambar di samping merupakan sebuah kerucut yang berimpit dengan setengah bola. Jika tinggi kerucut = 6 cm dan jari-jari bola = 3 cm, tentukan volume bangun ruang tersebut.

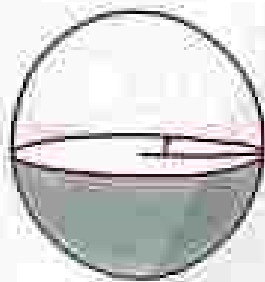
- Sebuah topi berbentuk seperti pada gambar di samping. Topi tersebut terbuat dari karton. Tentukan luas minimum karton yang digunakan.

$$\left(\pi = \frac{22}{7} \right)$$



7. Bola

a. Pengertian Bola



Bola adalah bangun ruang beraturan yang tidak mempunyai alas dan tidak mempunyai titik pojok.

b. Volume dan Luas Permukaan Bola

Secara umum, volume dan luas permukaan bola adalah sebagai berikut.

$$\text{Volume bola} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Luas permukaan bola} = 4\pi r^2$$

TANYA & JAWAB

Tanya:

Tentukan luas permukaan dan volume bola yang berjari-jari 12 cm. ($\pi = 3,14$)

Jawab:

$$\text{Luas permukaan bola} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \cdot (3,14) \cdot (12 \text{ cm})^2$$

$$= 1.809,56 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volume bola} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (3,14) \cdot 12^3 \text{ cm}^3$$

$$= 7.234,56 \text{ cm}^3$$

Jadi, luas permukaan bola adalah 1.809,56 cm² dan volume bola 7234,56 cm³.

Tanya:

Gambar berikut menunjukkan tabung dengan bola yang menyinggung sisi alas, sisi atas, dan selimut tabung. Selidiki, apakah luas selimut tabung sama dengan luas bola?



Jawab:

$$\text{Jari-jari bola} = \text{jari-jari tabung}$$

$$\text{Tinggi tabung} = 2 \times \text{jari-jari atau } t = 2r$$

$$\text{Luas selimut tabung} = 2 \pi r \times t = 2 \pi r \times 2r$$

$$= 4\pi r^2$$

$$= \text{luas bola}$$

Jadi, luas selimut tabung sama dengan luas bola.

TANYA & JAWAB

Tanya:

Sebuah bola logam dimasukkan ke dalam tabung yang berisi air sehingga permukaan air tabung menjadi naik. Hitunglah tinggi air yang naik jika diameter bola = 3 cm dan diameter tabung = 5 cm.

Jawab:

Air yang naik mengikuti bentuk yang ditempatinya yaitu tabung.

Tinggi air yang naik = t cm

Diameter tabung = 5 cm maka $r_1 = 2,5$ cm

Diameter bola = 3 cm maka $r_2 = 1,5$ cm

Volume air yang naik = Volume bola logam

$$\pi r_1^2 \times t = \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

$$2,5 \times 2,5 \times t = \frac{4}{3} \times 1,5 \times 1,5 \times 1,5$$

$$2,5 \times 2,5 \times t = 2 \times 1,5 \times 1,5$$

$$t = \frac{4,5}{6,25} = 0,72 \text{ cm}$$

ASAHI OTAK

BOLA

1. Diketahui sebuah bola plastik yang berjari-jari 12,5 cm. Jika $\pi = 3,14$, tentukan:
 - a. luas permukaan bola
 - b. volume bola
2. Sebuah balon berbentuk bola berisi 3.762 m³ gas. Tentukanlah jari-jari dan luas permukaan balon tersebut.
3. Di dalam sebuah kubus yang panjang rusuknya 6 cm, terdapat sebuah bola. Jika permukaan bola menyentuh keenam sisi kubus (ketebalan dinding kubus dan bola diabaikan), tentukan perbandingan volume kubus dengan volume bola.
4. Luas dua buah bola masing-masing L_1 dan L_2 . Jika $r_1 = 3r_2$, tentukan perbandingan luas kedua bola itu.



Sumber: www.balibola.com

5. Sebuah kotak berbentuk kubus mempunyai rusuk 10,1 cm. Ke dalam kotak tersebut akan dimasukkan kelereng berbentuk bola dengan jari-jari 1 cm. Berapa jumlah kelereng yang dapat dimasukkan ke dalam kotak?

B. Kedudukan Titik, Garis, dan Bidang dalam Ruang Dimensi Tiga

1. Kedudukan Titik terhadap Garis

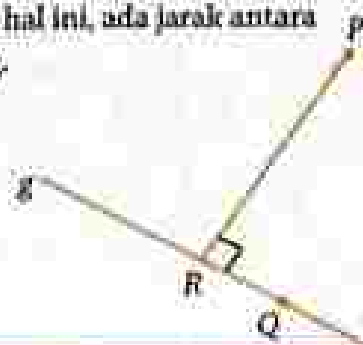
Kedudukan titik terhadap garis ada dua, yaitu:

- titik seletak dengan garis, dan
- titik tidak seletak dengan garis

Jika titik seletak dengan garis maka jarak antara titik tersebut dengan garis adalah 0. Jika titik tidak seletak dengan garis maka jaraknya tidak sama dengan 0. Dalam hal ini, ada jarak antara garis dengan titik. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar di samping.

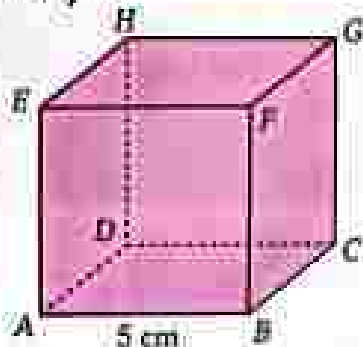
Pada gambar di samping, terlihat bahwa:

- titik Q terletak pada garis g dan titik P terletak di luar garis g
- jarak titik P ke garis g adalah 0, dan
- jarak titik Q ke garis g adalah panjang segmen garis PR , di mana PR tegak lurus dengan garis g .



TANYA & JAWAB

Tanya:



Misalkan, $ABCD.EFGH$ adalah sebuah kubus dengan rusuk 5 cm. Tentukan:

- Jarak titik C terhadap garis DH .
- Jarak titik C terhadap garis AE .

Jawab:

Perhatikan gambar kubus $ABCD.EFGH$ di samping.

- Jarak titik C terhadap garis DH .

Oleh karena CD tegak lurus dengan DH maka jarak titik C ke DH adalah panjang $CD = 5$ cm.

- Jarak titik C terhadap garis AE .

Oleh karena AC tegak lurus dengan AE maka jarak C terhadap garis AE adalah panjang AC . AC adalah diagonal sisi sehingga $AC = 5\sqrt{2}$ cm.

ASAHI OTAK

KEDUDUKAN TITIK TERHADAP GARIS

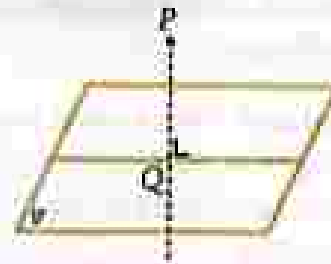
- Misal $ABCD.EFGH$ adalah sebuah kubus dengan rusuk r , tentukan:
 - titik-titik yang terletak pada garis AE .
 - titik-titik yang berada di luar garis AE .
- Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk r cm. Tentukan jarak titik A terhadap garis CH .
- Pada limas segiempat tegak $T.PQRS$, diketahui $PQ = QR = RS = 10$ cm. Jika $TE = 8$ cm adalah tinggi limas, tentukan jarak Q dengan TE .

2. Kedudukan Titik terhadap Bidang

Kedudukan titik terhadap bidang ada dua, yaitu:

- titik seletak dengan bidang, dan
- titik tidak seletak dengan bidang.

Jika titik seletak dengan bidang maka jarak antara titik tersebut dengan bidang adalah 0 dan jika titik tidak seletak dengan bidang maka jaraknya tidak sama dengan 0. Dalam hal ini, ada jarak antara bidang dengan titik. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar di samping.



Pada gambar tersebut, terlihat bahwa jarak titik P ke bidang v adalah panjang segmen garis PQ , di mana PR tegak lurus dengan bidang v .

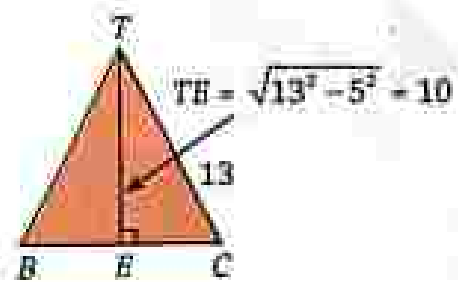
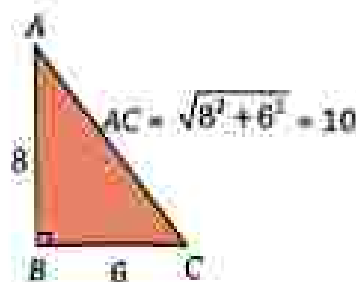
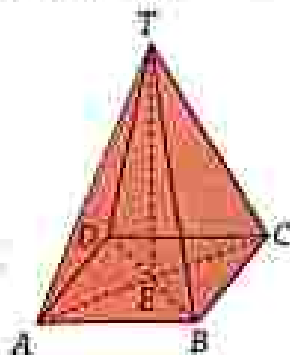
TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui limas beraturan $TABCD$ dengan $ABCD$ adalah persegi panjang, $AB = 8$ cm dan $BC = 6$ cm. Jika $TC = TA = TB = TD = 13$, tentukan jarak titik T terhadap bidang $ABCD$.

Jawab:

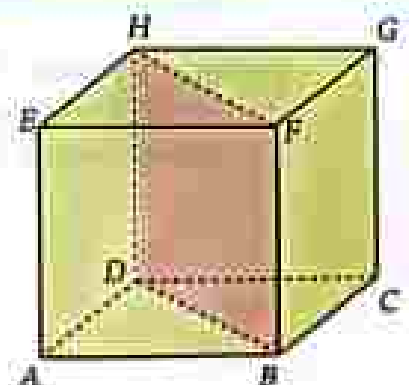
Perhatikan gambar limas $TABCD$ berikut.



Jadi, jarak titik T terhadap bidang $ABCD = TE = 12$ cm.

ASAHI OTAK KEDUDUKAN TITIK TERHADAP BIDANG

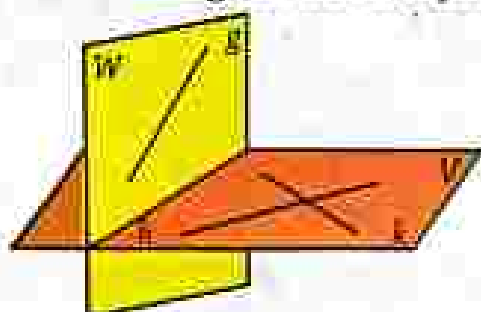
- Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 4 cm. Tentukan jarak titik A terhadap bidang $BFHD$.
- Pada limas beraturan $T.PQRS$, $PQRS$ adalah persegi panjang dengan $PQ = 24$ cm, $QR = 18$ cm dan $TR = TP = TQ = TS = 17$ cm. Tentukan jarak titik T terhadap bidang $PQRS$.



3. Kedudukan Garis dengan Garis

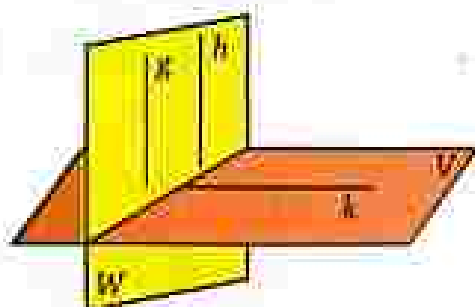
Dua buah garis dalam bangun ruang mempunyai beberapa kemungkinan, yaitu berpotongan, sejajar, dan bersilangan.

- a. Dua buah garis dikatakan saling berpotongan jika ada titik persekutuan antara kedua garis tersebut. Dua buah garis hanya dapat berpotongan jika terletak dalam satu bidang (atau melalui kedua garis tersebut dapat dibuat sebuah bidang).



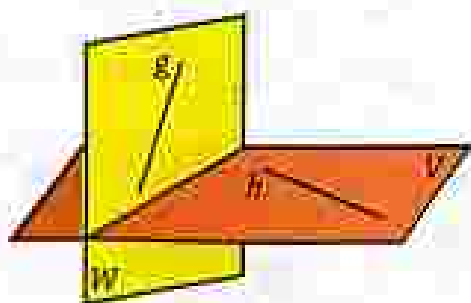
Perhatikan gambar di samping.
Garis h berpotongan dengan garis k dalam satu bidang, yaitu bidang V .
Garis k tidak berpotongan dengan garis g .

- b. Dua buah garis dikatakan sejajar jika kedua garis (atau perpanjangannya) tidak mempunyai titik persekutuan tetapi kedua garis tersebut terletak dalam satu bidang (atau melalui kedua garis tersebut dapat dibuat sebuah bidang).



Perhatikan gambar di samping.
Garis g sejajar dengan garis h dan keduanya terletak dalam bidang yang sama, yaitu bidang W .
Garis k tidak sejajar dengan garis g dan h .

- c. Dua buah garis dikatakan bersilangan jika kedua garis (perpanjangannya) tidak mempunyai titik persekutuan dan kedua garis tidak terletak dalam satu bidang.



Perhatikan gambar di atas.
Garis g dan h bersilangan dan keduanya terletak pada dua bidang yang berbeda.
Garis g pada bidang W dan garis h pada bidang V .

TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui prisma tegak $ABCDEF GHIJ$. Selidiki hubungan antara rusuk-rusuk prisma.



Jawab:

Perhatikan gambar prisma di samping.

AF, BG, CH, DI dan EJ adalah saling sejajar.

$AB // FG, BC // GH, CD // HI, DE // IJ, AE // FJ$.

Lambang $//$ dibaca sejajar.

$AB \perp AF, AB \perp BG, BC \perp BG, BC \perp CH, CD \perp CH, \dots, AE \perp AF$.

Garis yang bersilangan dengan BC di antaranya adalah CD, ED, AE, FJ, IJ , dan HI .

Garis yang bersilangan tegak lurus dengan AB adalah CH, DI , dan EJ .

INFO MATEMATIKA

Go to www.maths.org.uk

Selengkapnya, klik link www.maths.org.uk dan klik www.maths.org.uk

yang ada di bagian www.maths.org.uk dan klik www.maths.org.uk

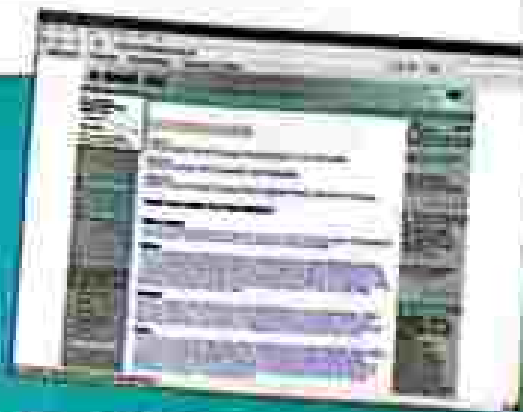
yang ada di bagian www.maths.org.uk dan klik www.maths.org.uk

yang ada di bagian www.maths.org.uk dan klik www.maths.org.uk

yang ada di bagian www.maths.org.uk dan klik www.maths.org.uk

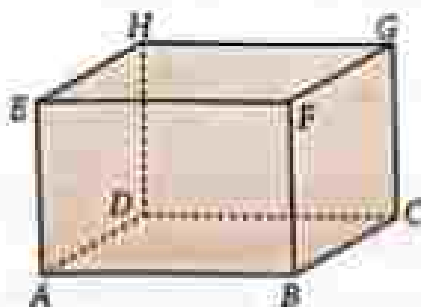
yang ada di bagian www.maths.org.uk dan klik www.maths.org.uk

yang ada di bagian www.maths.org.uk

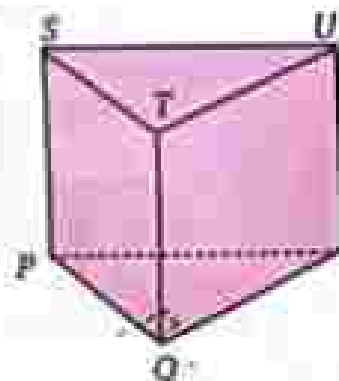


ASAHI OTAK KEDUDUKAN GARIS TERHADAP GARIS

1. Diketahui balok $ABCD EFGH$. Selidiki hubungan antara rusuk-rusuk balok tersebut.



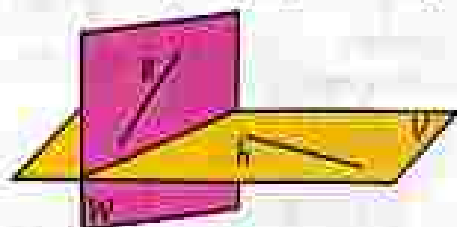
2. Diketahui prisma segitiga $PQR STU$. Selidiki hubungan antara rusuk-rusuk balok tersebut.



4. Kedudukan Garis terhadap Bidang

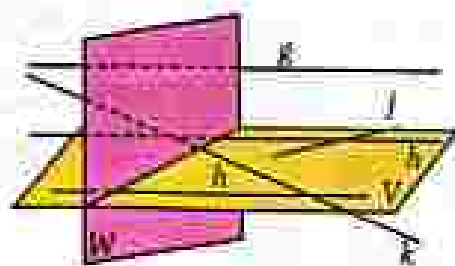
Kedudukan garis dengan bidang mempunyai beberapa kemungkinan, yaitu sejajar, dan menembus (memotong).

- a. Sebuah garis g dikatakan terletak pada bidang V jika semua titik yang ada pada garis g terletak pada bidang V (bidang V melalui garis g).
Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



Garis g terletak pada bidang W dan garis h terletak pada bidang V .

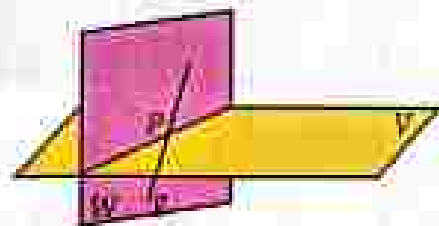
- b. Sebuah garis g dikatakan sejajar dengan bidang V jika tidak ada titik potong antara garis g (dan perpanjangannya) dengan bidang V .
Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



Garis h terletak pada bidang V , garis g sejajar dengan bidang V , dan sejajar juga dengan garis h .
Garis g berilangan dengan j .
Garis k menembus bidang V dan bidang W .

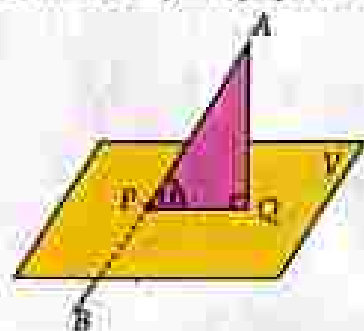
Jika garis g sejajar dengan bidang V maka garis g akan sejajar atau berilangan dengan garis-garis yang terdapat bidang V . Jika garis g sejajar dengan satu garis pada bidang V maka garis g akan sejajar dengan bidang V .

- c. Sebuah garis g dikatakan memotong (menembus) bidang V jika ada satu titik potong antara garis g dengan bidang V .
Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



Garis g terletak pada bidang W dan menembus bidang V di titik P .

Jika garis g memotong bidang V maka akan terbentuk sudut antara garis g dengan bidang V .
Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



Garis AB menembus bidang V di titik P , garis AP tegak lurus dengan bidang V dan juga tegak lurus dengan garis AQ yang terletak pada bidang V maka sudut yang terbentuk antara AP dengan bidang V adalah sudut APQ .

TANYA & JAWAB

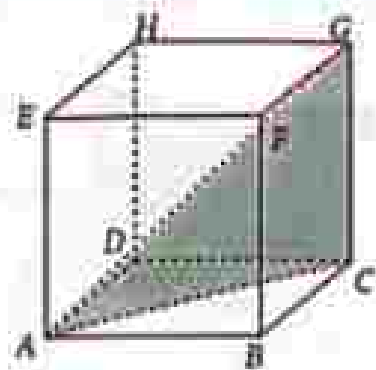
Tanya:

Misalkan, $ABCD.EFGH$ adalah sebuah balok dengan panjang rusuk r . Sudut apakah yang dibentuk oleh diagonal ruang AG dengan bidang $ABCD$?

Jawab:

Perhatikan gambar di samping.

Sudut yang terbentuk antara garis AG dengan $ABCD$ adalah sudut CAG .



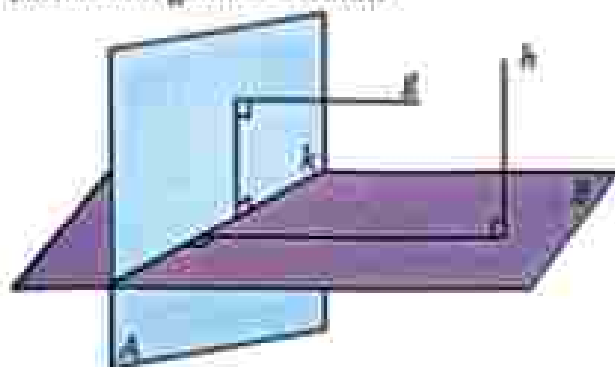
Tanya:

Bila garis g tegak lurus pada bidang A , garis h tegak lurus dengan bidang B dan bidang A berpotongan dengan bidang B pada garis k . Selidikilah apakah pernyataan berikut benar.

1. Garis g tegak lurus (bersilangan tegak lurus) dengan garis k
2. Garis g tegak lurus dengan bidang B
3. Garis h tegak lurus dengan (bersilangan tegak lurus) dengan garis k
4. Garis h tegak lurus dengan bidang A

Jawab:

Perhatikan gambar berikut.



Karena garis k merupakan perpotongan antara bidang A dan B maka garis k terletak pada kedua bidang tersebut.

Jika garis g tegak lurus bidang A maka garis g tegak lurus (bersilangan tegak lurus) dengan garis k .
Jika garis h tegak lurus bidang B maka garis h tegak lurus (bersilangan tegak lurus) dengan garis k .
Jadi, pernyataan yang benar adalah 1 dan 3.

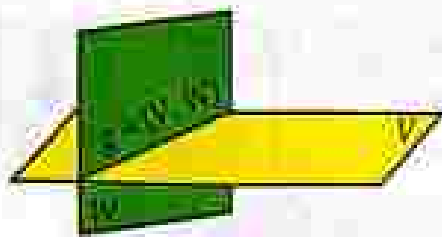
ASAHI OTAK KEDUDUKAN GARIS TERHADAP BIDANG

1. Misalkan, $ABCD.EFGH$ adalah sebuah kubus dengan panjang rusuk 3 cm. Jika α adalah sudut yang terbentuk oleh garis AG dengan bidang $ABCD$, tentukan $\tan \alpha$.
2. Garis g dan h saling bersilangan. Bidang v melalui g dan sejajar dengan garis h . Bidang w melalui h dan berpotongan dengan bidang v . Manakah dari pernyataan-pernyataan berikut yang benar?

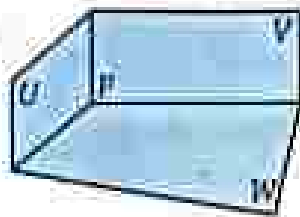
a. k sejajar g dan memotong h	d. k sejajar h dan memotong g
b. k memotong g dan h	e. k berimpit dengan g
c. k dan h bersilangan	

5. Kedudukan Bidang terhadap Bidang

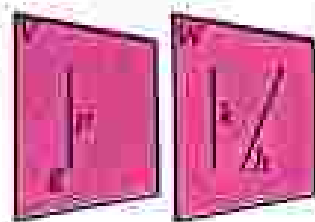
Di dalam ruang, kedudukan dua bidang memiliki beberapa kemungkinan, yaitu terlihat seperti pada gambar berikut.



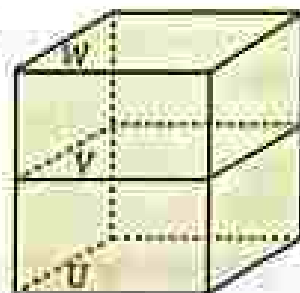
Bidang V dan bidang W berpotongan pada garis g . Perpotongan tersebut dapat dinotasikan dengan (V, W) .



Titik p merupakan titik persekutuan antara bidang U , V , dan W .

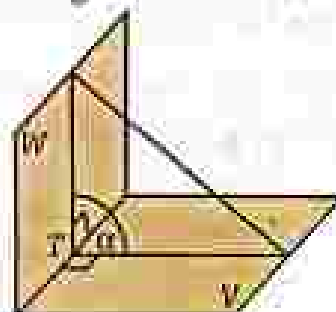


Bidang V sejajar dengan bidang W . Garis g sejajar dengan garis k dan garis g berimpitan dengan garis h .



Bidang U , V , dan W saling sejajar.

Jika dua buah bidang berpotongan maka akan ada sudut yang terbentuk. Sudut yang terbentuk dapat diwakili oleh dua buah garis di mana garis pertama pada bidang pertama dan garis kedua pada bidang kedua. Kedua garis tersebut tegak lurus dengan garis perpotongan antara kedua bidang. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



TANYA & JAWAB

Tanya:

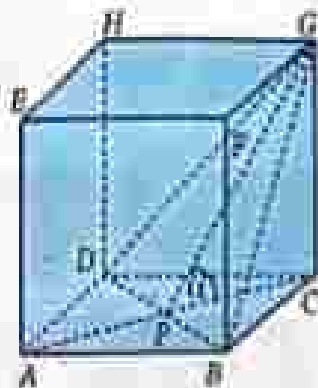
Diketahui kubus $ABCD.EFGH$. Gambarkanlah bidang GBD , kemudian tentukanlah garis perpotongan antara bidang GBD dengan bidang $ABCD$. Tentukanlah sudut yang mewakili sudut yang dibentuk kedua bidang tersebut dan tentukan nilai tangen sudutnya.

Jawab:

Perhatikan gambar di samping.

Bidang GBD berpotongan dengan $ABCD$ pada garis BD . GP terletak pada bidang GBD dan CP tegak lurus dengan BD maka sudut GPC dapat mewakili sudut yang dibentuk bidang GBD dengan bidang $ABCD$. Perhatikan $\triangle GPC$. $\triangle GPC$ adalah segitiga siku-siku.

$$\text{Misalkan, } \angle GPC = \alpha \text{ maka } \tan \alpha = \frac{CG}{CP} = \frac{a}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



Tanya:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$. Sudut antara bidang $ABCD$ dan bidang ACF adalah α . Tentukan $\cos \alpha$.

Jawab:

Perhatikan gambar di samping.

AC adalah garis potong antara bidang $ABCD$ dengan bidang ACF .

Garis FT dan BT terletak pada bidang ACF dan tegak lurus terhadap AC .

Pada gambar tampak bahwa $\alpha = \angle BTF$.

Karena $\triangle BFT$ siku-siku di B maka berlaku rumus Pythagoras

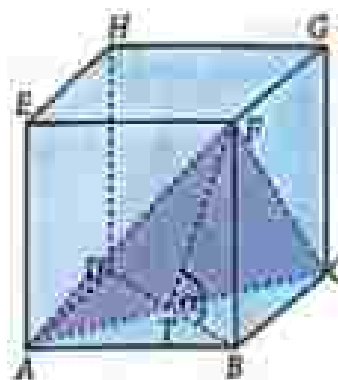
$$FT^2 = BT^2 + BF^2$$

Misalkan, panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH = a$ cm.

BD adalah diagonal dengan panjang $= a\sqrt{2}$ cm sehingga

$$FT = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2\right) + a^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \angle BTF = \cos \alpha = \frac{BT}{FT} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{a\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \text{ Jadi, } \cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$



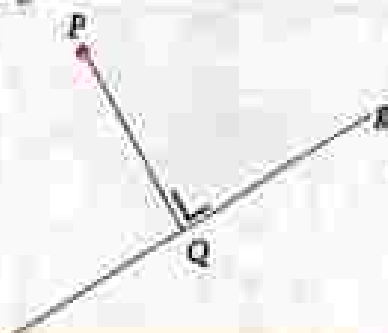
ASAHI OTAK KEDUDUKAN BIDANG TERHADAP BIDANG

1. Diketahui limas segitupat beraturan $TABCD$. Tentukan bidang-bidang yang tegak lurus dengan TBD .
2. Misalkan, $ABCDEF$ adalah sebuah prisma segitiga sama kaki, dengan $AC = BC = 17$, $AB = 16$, dan $AD = 20$. Jika α adalah sudut yang dibentuk oleh bidang ABF dengan ABC , tentukan nilai $\cos \alpha$.
3. Panjang rusuk $ABCD.EFGH$ sama dengan r cm. Jika α adalah sudut yang dibentuk bidang TQS dengan bidang $PQRS$, tentukan $\sin \alpha$.

C. Jarak dalam Ruang

1. Jarak Titik dan Garis dalam Ruang

Jika terdapat titik P yang tidak terletak pada garis g maka jarak titik P ke garis g dapat ditentukan dengan cara berikut.



Tarik garis yang melalui P yang tegak lurus g . Garis PQ adalah jarak (panjang) titik P dengan garis g .

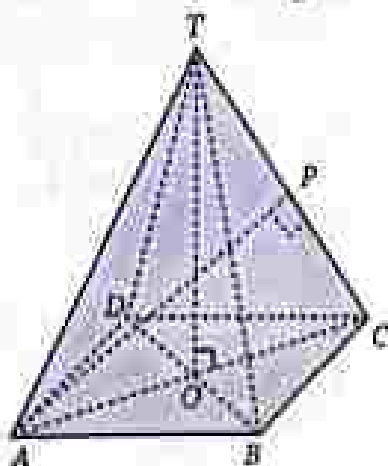
TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui limas segiempat beraturan $TABCD$, dengan $AB = BC = 5$ cm dan $TA = 13$ cm. Tentukan jarak titik A ke garis TC .

Jawab:

Soal di atas dapat kita gambarkan sebagai berikut.



$$AC = \text{diagonal persegi } ABCD = (5\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 10 \text{ cm}$$

$$AO = \frac{1}{2} \times AC = 5 \text{ cm}$$

$$TO^2 = TA^2 - AO^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow TO = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Luas segitiga } ACT \text{ jika alasnya } AC = \frac{1}{2} AC \times TO$$

$$\text{Luas segitiga } ACT \text{ jika alasnya } TC = \frac{1}{2} TC \times AP \text{ maka}$$

$$\frac{1}{2} AC \times TO = \frac{1}{2} TC \times AP$$

$$AP = \frac{AC \times TO}{TC} = \frac{10 \times 12}{13} = 9 \frac{3}{13} \text{ cm}$$

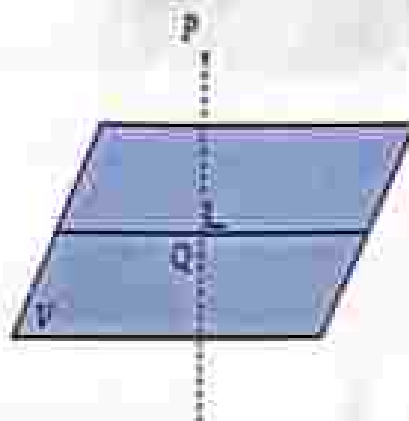
ASAHI OTAK

JARAK TITIK DAN GARIS DALAM RUANG

1. Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 8$, $BC = 3$, dan $CG = 12$. Titik P adalah titik tengah AB . Tentukan jarak titik P dengan titik H .
2. Limas segiempat beraturan $TABCD$ memiliki panjang rusuk alas 6 cm dan rusuk tegak 3 cm. Tentukan jarak titik C dan TA .
3. Diketahui bidang empat beraturan $TABC$ dengan panjang rusuk = 4. Jika P adalah titik tengah AB , berapakah jarak titik P dengan garis TC ?

2. Jarak Titik dan Bidang dalam Ruang

Jika terdapat titik P yang tidak terletak pada bidang V maka jarak titik P ke bidang V dapat ditentukan dengan cara menarik garis yang melalui P yang tegak lurus V . Garis PQ adalah jarak (panjang) titik P dengan bidang V .



TANYA & JAWAB

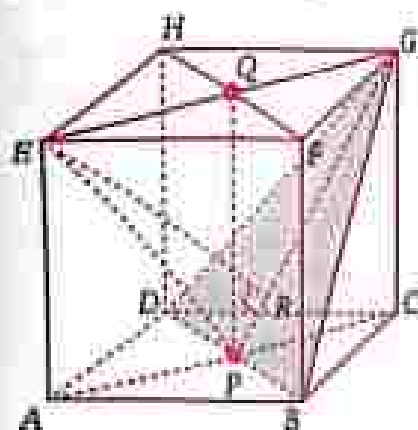
Tanya:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 48 cm. Tentukan jarak titik E ke bidang BDG .

Jawab:

Soal tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.

Jarak titik E ke bidang BDG adalah ER .



$$EG = AC = 48\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$PC = \frac{1}{2} \times AC = 24\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$PE = PG = \sqrt{PC^2 + CG^2} = \sqrt{(24\sqrt{2})^2 + 48^2} = 24\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$PG = AE = 48 \text{ cm}$$

$$\text{Luas segitiga } EPG \text{ jika alasnya } EG = \frac{1}{2} EG \times PQ$$

$$\text{Luas segitiga } EPG \text{ jika alasnya } ER = \frac{1}{2} ER \times PG \text{ maka}$$

$$\frac{1}{2} EG \times PQ = \frac{1}{2} ER \times PG$$

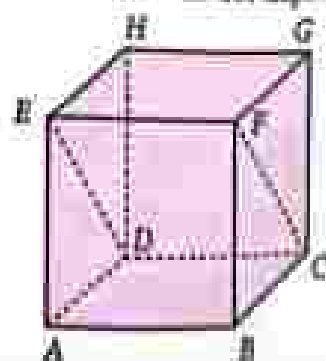
$$ER = \frac{EG \times PQ}{PG} = \frac{48\sqrt{2} \times 48}{24\sqrt{6}} = 32\sqrt{3} \text{ cm}$$

Tanya:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 6 cm. Tentukan jarak garis DE dengan garis CF .

Jawab:

Kubus $ABCD.EFGH$ dapat kita gambarkan sebagai berikut.



Perhatikan persegi panjang $CDEF$.

CD adalah garis yang tegak lurus dengan garis DE dan CF sehingga jarak garis DE dengan garis CF dapat diwakili oleh CD . Jadi, jarak garis DE ke garis $CF = 6 \text{ cm}$.

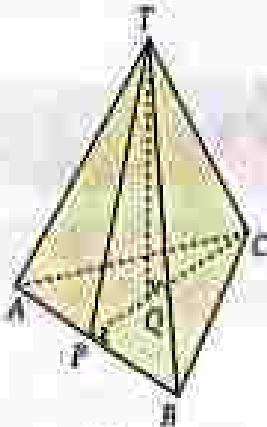
TANYA & JAWAB

Tanya

Diketahui bidang empat beraturan $T.ABC$ dengan panjang rusuk 6 cm. Tentukan jarak titik T ke bidang ABC .

Index

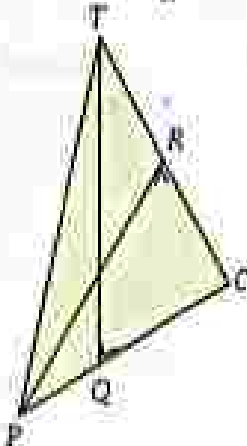
Soal di atas dapat kita gambarkan sebagai berikut



Jarak T ke bidang BDG adalah TQ

Pada segitiga ATP , $TP = \sqrt{AT^2 - AP^2}$
 $= \sqrt{6^2 - 3^2}$
 $= \sqrt{36 - 9}$
 $= \sqrt{27}$
 $= 3\sqrt{3} \text{ cm}$

Dengan demikian, $PC = TP = 3\sqrt{3}$ cm.



Perhatian sebagai TPC

$TR = RC = 3 \text{ cm}$

$$PR = \sqrt{TP^2 - TR^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Luas segitiga TPC jika alasnya PC = $\frac{1}{2} PC \times TQ$

Luas segitiga TPC jika alasnya TC = $\frac{1}{2} TC \times PR$ maka

$$\frac{1}{2} PC \times TQ = \frac{1}{2} TC \times PR$$

$$TQ = \frac{TC \times PR}{PC} = \frac{6 \times 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

Jadi, jarak titik T ke bidang ABC adalah $3\sqrt{6}$ cm.

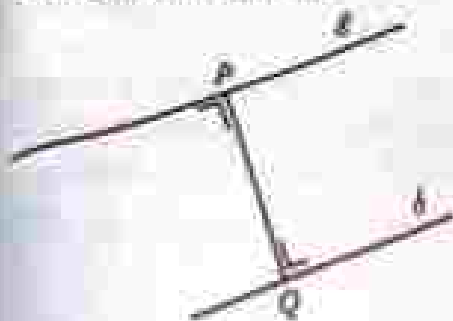
ASAHI OTAKU

ARAH TITIK DAN BIDANG DALAM RUANG

1. Kubus $ABCD.EFGH$ memiliki rusuk $6\sqrt{3}$ cm. Berapakah jarak titik F dengan bidang BDG ?
2. Diketahui bidang empat beraturan $DABC$ dengan rusuk $7\sqrt{2}$ cm. Tentukan jarak titik D dan bidang ABC .
3. Diketahui bidang empat beraturan $TABC$ dengan panjang rusuk = 4. Tentukan jarak titik C ke bidang TAB .
4. Tentukan jarak titik H ke bidang ACF pada kubus jika diketahui rusuk kubus adalah p cm.
5. Diketahui kubus $PQRS.TUVW$ dengan panjang rusuk-rusuknya 6 cm. Tentukan jarak titik R dan bidang PTW .

3. Jarak Dua Garis dalam Ruang

Jika terdapat dua buah garis g dan h yang sejajar maka jarak garis g ke garis h dapat ditentukan dengan cara berikut.



Tarik sebuah garis yang tegak lurus g dan h .
Garis PQ adalah jarak (panjang) garis g ke garis h .

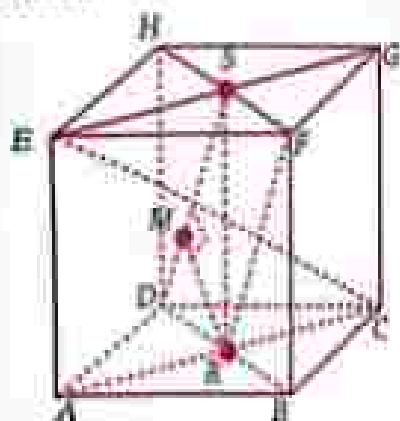
TANYA & JAWAB

Tanya:

Dalam kubus $ABCD.EFGH$, dengan $AB = 6$ cm, titik S dan R berturut-turut adalah pusat bidang $EFGH$ dan $ABCD$. Tentukan jarak antara garis RF dan DS .

Jawab:

Soal di atas dapat kita gambarkan sebagai berikut.



Jarak garis RF dengan garis DS adalah garis RM .

$$BD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$RD = \frac{1}{2} BD = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$DS^2 = RS^2 + RD^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36 + 18 = 54$$

$$DS = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\text{Luas segitiga } DSR \text{ jika alasnya } DS \text{ maka} = \frac{1}{2} DS \times RM$$

$$\text{Luas segitiga } DSR \text{ jika alasnya } RD \text{ maka} = \frac{1}{2} RD \times RS$$

$$\frac{1}{2} DS \times RM = \frac{1}{2} RD \times RS$$

$$\text{Jadi, } RM = \frac{RD \times RS}{DS} = \frac{3\sqrt{2} \times 6}{3\sqrt{6}} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

ASAHI OTAK

JARAK DUA GARIS DALAM BIDANG

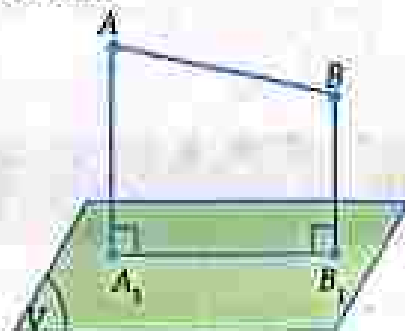
1. Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 12$, $BC = 8$, dan $BF = 5$. Tentukan jarak rusuk AB dengan rusuk HG .
2. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 4. Berapakah jarak garis AC dengan garis EG ?
3. Diketahui limas beraturan $TABCD$ dengan $AB = 4$ dan $TA = 5$. Jika P terletak pada pertengahan AT dan Q terletak pada pertengahan TC , tentukan jarak garis PQ dengan garis AC .
4. Balok $PQRS.TUVW$ mempunyai panjang 8 cm, lebar 4 cm, dan tinggi 6 cm. Berapakah jarak antara PQ dan TW ?

D. Sudut dalam Ruang

1. Proyeksi Garis pada Bidang

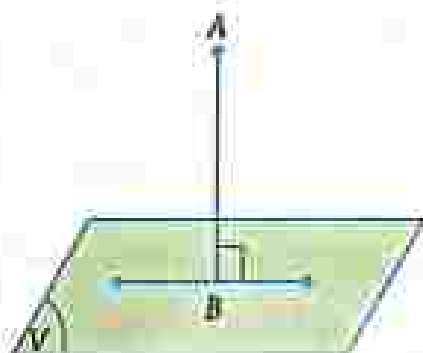
Letak suatu garis AB terhadap bidang V dapat digambarkan sebagai berikut:

- (1) Jika garis AB terletak di luar bidang V maka untuk mencari proyeksi garis AB terhadap bidang V adalah dengan membuat garis dari titik A yang memotong tegak lurus bidang V , misalnya A_1 , dan titik B yang juga memotong tegak lurus bidang V , misalnya B_1 , seperti pada gambar berikut.

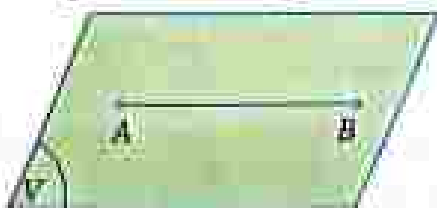


Proyeksi garis AB adalah garis A_1B_1 .

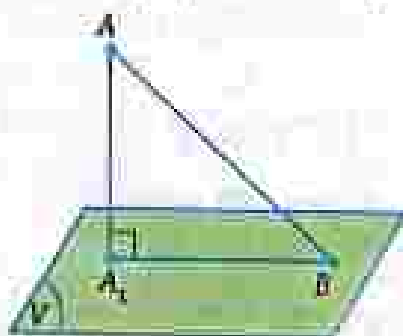
- (2) Jika garis AB tegak lurus bidang V maka proyeksi garis AB adalah titik B .



- (3) Jika garis AB terletak pada bidang V maka proyeksi garis AB adalah garis AB sendiri.



- (4) Jika garis AB salah satu titiknya (misalnya B) terletak pada bidang V maka untuk mencari proyeksi garis AB terhadap bidang V adalah dengan membuat garis dari titik A yang memotong tegak lurus bidang V (misalnya A_1).



Dari gambar di atas, terlihat bahwa proyeksi garis AB adalah garis A_1B .

TANYA & JAWAB

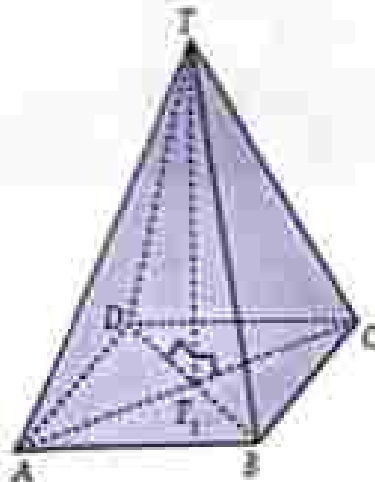
Tanya:

Diketahui limas $TABCD$ beraturan. Jika panjang $AB = 4$ cm dan $TA = 4$ cm. Tentukan:

- panjang proyeksi garis TA pada bidang $ABCD$.
- panjang proyeksi garis TA pada bidang TBD .

Jawab:

Perhatikan gambar berikut.



- Panjang proyeksi garis TA pada bidang $ABCD$

Proyeksi garis TA pada bidang $ABCD$ adalah garis AT_1 .

$$\begin{aligned} AT_1 &= \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{32} = 2\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

- Panjang proyeksi garis TA pada TBD

Proyeksi garis TA pada bidang TBD adalah garis TT_2 .

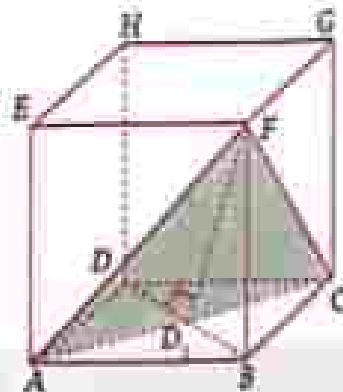
$$\begin{aligned} TT_2 &= \sqrt{TA^2 - (AT_1)^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{32 - 8} = 2\sqrt{6} \text{ cm} \end{aligned}$$

Tanya:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 10 cm. Dapatkah kamu menentukan panjang proyeksi garis DF pada bidang ACF ?

Jawab:

Perhatikan gambar berikut.



Panjang proyeksi garis DF pada bidang ACF adalah garis DD_1 .

$$FB = 10 \text{ cm}, DB = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$BD_1 = \frac{1}{2} DB = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} BD_1 &= \sqrt{BF^2 + (D_1B)^2} = \sqrt{10^2 + (5\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{150} = 5\sqrt{6} \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi, panjang proyeksi garis DF pada bidang ACF adalah $5\sqrt{6}$ cm.

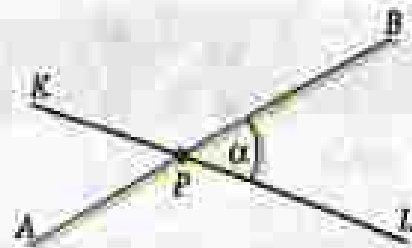
ASAHI OTAK PROYEKSI GARIS PADA BIDANG

- Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 5. Tentukan panjang proyeksi garis AH ke bidang $BCGF$.
- Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 4$, $BC = 3$, dan $CG = 2$. Berapakah panjang proyeksi garis AG dengan bidang $ABCD$?
- Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 6. Titik P terletak di AB dengan $AP : PB = 2 : 1$. Jika garis PF diproyeksikan pada bidang $ACGE$, tentukan panjang proyeksinya.

2. Sudut Antara Dua Garis

Jika terdapat dua garis, misalnya g dan h , maka g dan h dapat membentuk sudut dengan catatan garis g dan h saling berpotongan atau saling bersilangan. Oleh karena sudut yang terbentuk dari dua garis tersebut ada empat maka sudut yang dimaksud adalah sudut lancip (yang paling kecil).

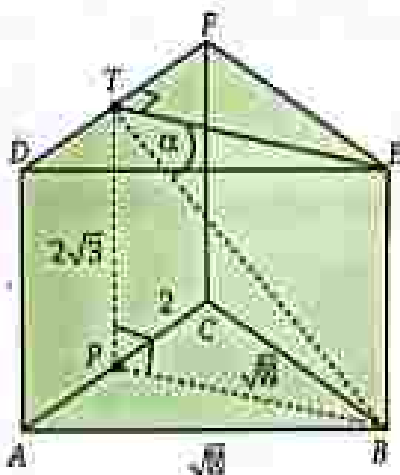
Dari gambar di atas, diketahui garis AB dan KL saling berpotongan di titik P dan sudut yang terbentuk adalah $\angle APQ = \alpha$. Sudut α dapat dicari dengan memanfaatkan unsur-unsur yang ada dalam segitiga APQ .



TANYA & JAWAB

Tanya:

Pada prisma segitiga tegak $ABC.DEF$, $AB = BC = \sqrt{5}$ cm, $AC = 2$ cm, $AD = 2\sqrt{3}$ cm. Jika T terletak pada pertengahan DF , berapakah besar sudut yang dibentuk BT dengan TE ?



Jawab:

Perhatikan gambar berikut.

$$DA = PT = BE = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$AP = \frac{1}{2} AC = 1 \text{ cm}$$

$$BP = TE = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2 \text{ cm}$$

Perhatikan segitiga BPT .

$$BT = \sqrt{BP^2 + PT^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{BT^2 + TE^2 - BE^2}{2 \cdot BT \cdot TE} \\ &= \frac{16 + 4 - 12}{2 \cdot 4 \cdot 2} \\ &= \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ \end{aligned}$$

Jadi, sudut yang dibentuk BT dengan TE adalah 60° .

ASAHI OTAK

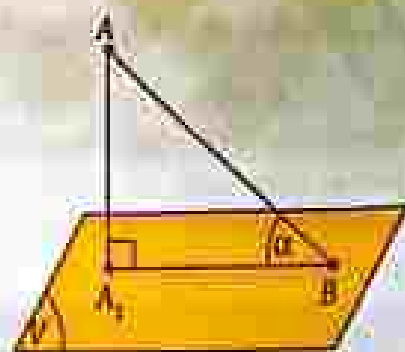
SUDUT ANTARA DUA BIDANG

1. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 4. Titik P adalah perpotongan EG dan FH . Berapakah kosinus sudut yang dibentuk oleh garis AP dengan CP ?
2. Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 8$, $BC = 4$ dan $BF = 4$. Jika P adalah titik tengah AB , dan α adalah sudut yang dibentuk PF dengan CF , berapakah $\sin \alpha$?
3. Diketahui limas beraturan $TABCD$ dengan $TA = 6$ dan $AB = 4$. Berapa nilai sinus sudut yang dibentuk garis TA dengan TC ?

3. Sudut Antara Garis dan Bidang

Jika garis AB menembus bidang V maka garis AB dan bidang V akan membentuk sudut yang besarnya sama dengan yang terbentuk antara proyeksi garis AB pada bidang V (α).

Jika garis tegak lurus bidang maka sudut yang terbentuk adalah siku-siku (90°) dan jika garis terletak pada bidang maka sudut yang terbentuk adalah 0° .



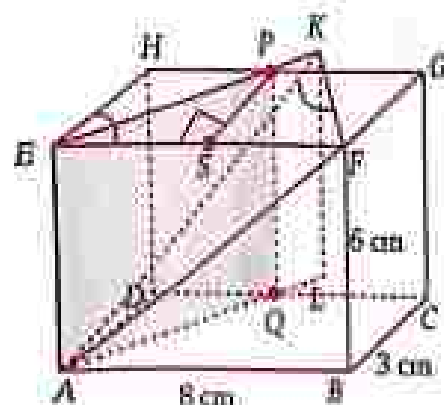
TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 8$ cm, $BC = 3$ cm, dan $BF = 6$ cm. Titik P terletak pada pertengahan GH , dan titik Q terletak pada pertengahan CD . Tentukan $\sin \angle (AF, AQPE)$.

Jawab:

Perhatikan gambar berikut.



$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 10 \text{ cm}$$

$$HP = PG = ES = SF = \frac{1}{2} HG = 4 \text{ cm}$$

$$HE = PS = GF = 3 \text{ cm}$$

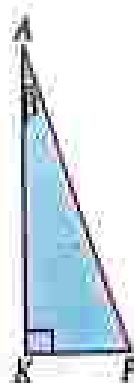
$$EP = PF = \sqrt{ES^2 + PS^2} = 5 \text{ cm}$$

Kita dapat menentukan $\sin \angle (AF, AQPE)$, dengan menentukan nilai $\sin \beta$ pada segitiga AKF .

- Pada segitiga EPS , $\sin \theta = \frac{PS}{EP} = \frac{3}{5}$
- Pada segitiga EKF , $\sin \theta = \frac{KF}{EF} = \frac{KF}{8}$

$$\text{maka } \frac{KF}{8} = \frac{3}{5} \rightarrow KF = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

$$\text{Pada segitiga } AKF, \sin \beta = \frac{KF}{AF} = \frac{\frac{24}{5}}{10} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

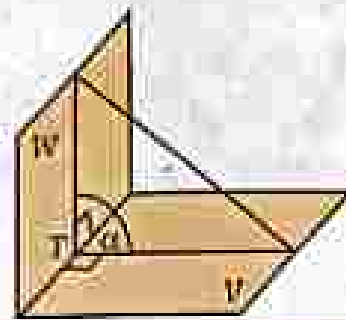


ASAHI OTAK SUDUT ANTARA GARIS DAN BIDANG

1. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 4. Misalkan, α adalah sudut yang dibentuk garis DF dengan bidang $ABCD$. Berapakah nilai $\cos \alpha$?
2. Pada kubus $ABCD.EFGH$, berapakah besar sudut yang dibentuk oleh garis AH dengan bidang $ACGE$?
3. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 4. Misalkan, β adalah sudut yang dibentuk garis CG dengan bidang BDG . Berapakah nilai $\tan \beta$?

4. Sudut Antara Dua Bidang

Sudut antara dua bidang (misalnya, V dan W) yang saling berpotongan adalah sudut yang terbentuk oleh dua garis pada masing-masing bidang tersebut di mana garis itu tegak lurus pada garis potong kedua bidang tersebut di satu titik (misalnya T) seperti diperlihatkan pada gambar di samping.



TANYA & JAWAB

Tanya:

Diketahui sebuah kubus $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 6$ cm. Tentukan:

- $\cos \angle(BDG, BDE)$
- $\tan \angle(BDG, ABCD)$

Jawab:

- $\cos \angle(BDG, BDE)$

$$\angle(BDG, BDE) = \angle EPG$$

$$AC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$PG = PE = \sqrt{PC^2 + CG^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$EG = AC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

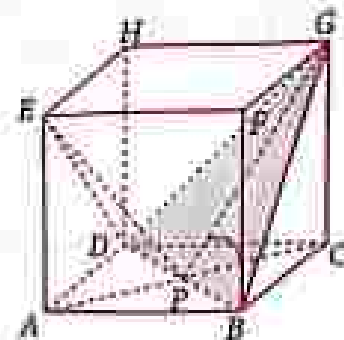
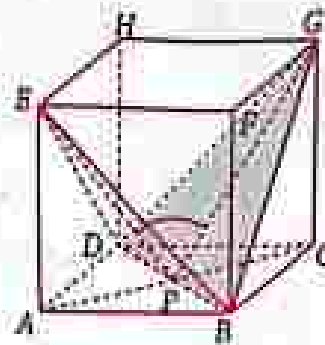
$$\cos \angle EPG = \frac{PE^2 + PG^2 - EG^2}{2 \cdot PE \cdot PG} = \frac{(3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{6})^2 - (6\sqrt{2})^2}{2(3\sqrt{6})(3\sqrt{6})} = \frac{1}{3}$$

- $\tan \angle(BDG, ABCD)$

$$\angle(BDG, ABCD) = \angle CPG$$

$$PC = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\tan \angle CPG = \frac{CG}{PC} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



Tanya:

Diketahui limas $D.ABC$ Tiga rusuk yang bertemu di titik A dari adalah saling tegak lurus dengan $AB = AC = 4\sqrt{2}$ cm, dan $AD = 4\sqrt{3}$ cm. Tentukan besar sudut antara bidang BCD dan ABC .

Jawab:

Perhatikan gambar di samping.

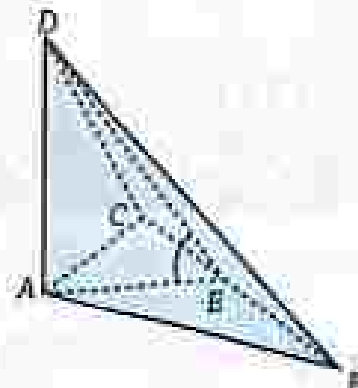
Sudut antara bidang BCD dan ABC adalah $\angle DEA$.

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8 \text{ cm}$$

$$BE = CE = \frac{1}{2}BC = 4 \text{ cm}$$

$$\sin \angle ABE = \frac{AE}{AB} \rightarrow AE = AB \sin 45^\circ$$

$$AE = 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 4 \text{ cm} \rightarrow \tan \angle DEA = \frac{DA}{AE} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ maka } \angle DEA = 60^\circ.$$



ASAHI OTAK

SUISUT ANTARA DUA BIDANG

1. Pada kubus $ABCD.EFGH$, berapakah besar sudut yang dibentuk oleh bidang $ACGE$ dengan bidang $BCGF$?
2. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 4. Berapakah besar tangen sudut yang dibentuk bidang ACF dengan bidang $ABCD$?
3. Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$ dan $BF = 5$. Tentukan besar sudut yang dibentuk bidang $ADHB$ dengan bidang $BDHF$.

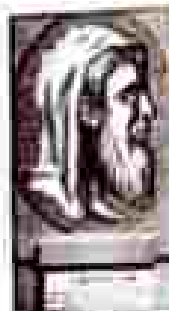


AMAZING PERSON

EUCLID

(325 SM - 265 SM)

Penemu Geometri dari Alexandria



Sumber: <http://www.gutenberg.org/files/51410/51410-h/51410-h.htm>

Euclid dikenal karena kontribusinya dalam membuat buku "The Elements". Buku tersebut banyak memengaruhi pemikiran dari ahli matematikawan lain sehingga matematika berkembang.

Buku "The Elements" merupakan buku pegangan buku matematika lebih dari 2.000 tahun dan merupakan buku teks yang paling sukses yang pernah disusun manusia. Aslinya ditulis dalam bahasa Yunani, kemudian diterjemahkan ke dalam berbagai bahasa. Terbitan pertama muncul tahun 1482, sekitar 30 tahun sebelum penemuan mesin cetak oleh Gutenberg. Sejak penemuan mesin itu, dicetak dan diterbitkan dalam berbagai edisi dengan beragam cetak.

The Elements dapat dikatakan karya monumental pada zaman itu. Terdiri atas 13 buku yang terusun berdasarkan tema dan topik.

Setiap buku diawali dengan definisi, postulat (untuk buku I), preposisi, theorem sebelum ditutup dengan pembuktian dengan menggunakan definisi dan postulat yang sudah disebutkan. Buku ini ke luar Yunani tahun 1482, diterjemahkan ke dalam bahasa Latin dan Arab, serta menjadi buku teks geometri dan logika pada awal tahun 1700-an.

Euclid mencetuskan 5 postulat yang kemudian menjadi pokok materi dalam geometri, yaitu:

- (1) Garis lurus dapat digambar dari (sembarang) titik sampai (sembarang) titik lainnya.
- (2) Ujung garis lurus dapat dilanjutkan terus sebagai garis lurus.
- (3) Lingkaran dapat digambar dari sembarang titik pusat dan dengan jari-jari berbeda.
- (4) Semua sudut-sudut di sisi kanan besarnya sama dengan sisi lainnya.
- (5) Apabila garis lurus terpotong menjadi dua garis lurus, menyudut di sisi dalam pada kedua garis pada sisi yang sama daripada dua sudut yang sejajar, jika diteruskan sampai ke titik tak terhingga, akan terpotongan pada sisi di mana sudutnya lebih kecil dibandingkan sudut yang terbentuk dari dua garis.



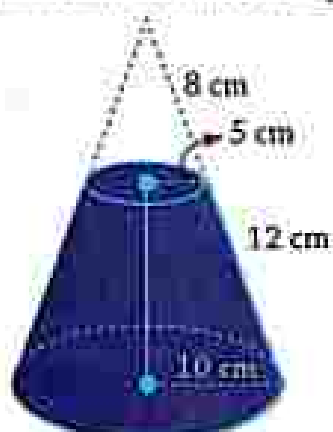
LET'S ACT

Petunjuk:

1. Selesaikan setiap permasalahan berikut secara individu (± 20 menit).
2. Buatlah 3 kelompok dengan menentukan satu orang sebagai ketua kelompok.
3. Diskusikan penyelesaian kalian untuk mengukuhkan penyelesaian yang telah diperoleh dari masing-masing anak (± 20 menit).
4. Setiap kelompok diberikan kesempatan untuk mempresentasikan penyelesaian dari satu permasalahan (misalnya, kelompok 1 mempresentasikan permasalahan 1) dan kelompok lainnya diberikan kesempatan untuk membandingkan penyelesaian tersebut jika penyelesaian yang dipresentasikan tidak sama dengan penyelesaian kelompoknya atau kelompok yang lain mempunyai langkah yang berbeda dalam menyelesaikan permasalahan tersebut (± 40 menit).

Permasalahan 1:

Gambar berikut menunjukkan kap lampu dengan jari-jari lingkaran atas 5 cm dan jari-jari lingkaran bawah 10 cm. Bahan yang digunakan untuk membuat kap lampu adalah ... cm^2 .



Sumber: www.kaplamp.com

Permasalahan 2:

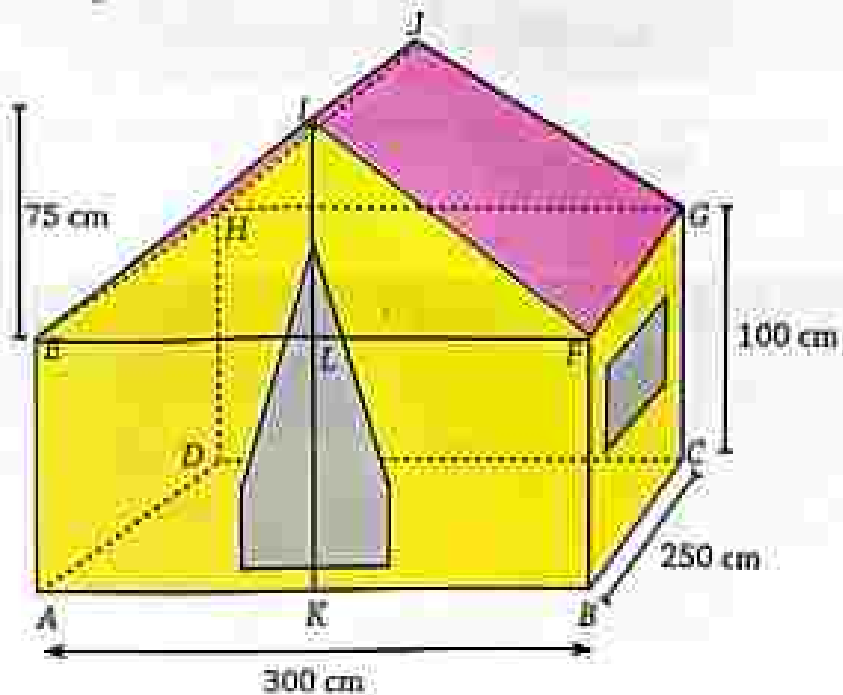
The Great Pyramid dibangun di Mesir pada tahun 2800 sebelum Masehi pada masa pemerintahan **Raja Cheops**. Dasar piramida tersebut berbentuk persegi. Panjang sisinya 756 kaki dan tinggi dari sisi sampingnya sama dengan 611 kaki (perhatikan gambar). Tentukan luas permukaan dan volume piramida (dalam meter).



Sumber:
<http://www.unsulluendy.com>

Permasalahan 3 :

Diketahui sebuah tenda perkemahan digambarkan seperti gambar berikut.



Diketahui $AB = 300$ cm; $BC = 250$ cm, $CG = 100$ cm, dan $IL = 75$ cm. Tentukan:

- luas permukaan tenda,
- besar sudut yang terbentuk antara garis BH dengan bidang $ELJH$.



Sumber: <http://www.campsite.com>

1. Bangun ruang adalah sebuah bangun yang memiliki luas dan volume. Bangun ruang terbagi menjadi 3, yaitu prisma, limas, dan bola.

2. Luas permukaan dan volume bangun ruang.

Bangun Ruang	Luas Permukaan	Volume
Prisma	$2 \times \text{Luas alas} + \text{Luas selimut}$	$\text{Luas alas} \times \text{tinggi}$
Limas	$\text{Luas alas} + \text{Luas selimut}$	$\frac{1}{3} \times \text{Luas alas} \times \text{tinggi}$
Bola	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

3. Kedudukan titik, garis, dan bidang dalam ruang adalah sebagai berikut.

- Kedudukan titik terhadap garis ada dua, yaitu seletak dan tidak seletak dengan garis.
- Kedudukan titik terhadap bidang ada dua, yaitu seletak dan tidak seletak dengan bidang.
- Kedudukan garis dengan garis, dua buah garis dalam bangun ruang mempunyai beberapa kemungkinan, yaitu berpotongan, sejajar dan bersilangan.
- Kedudukan garis dengan bidang mempunyai beberapa kemungkinan, yaitu seletak, sejajar dan menembus (memotong).
- Kedudukan bidang dengan bidang mempunyai beberapa kemungkinan, yaitu sejajar dan menembus (memotong).

4. Jarak dalam ruang

- Jarak titik P pada garis g adalah panjang garis dari P yang tegak lurus g .
- Jarak titik P pada bidang α adalah panjang garis dari P yang tegak lurus α .
- Jarak dua buah garis g dan h yang sejajar adalah panjang garis dari g ke garis h yang tegak lurus g dan h .

5. Sudut dalam ruang

- Jika terdapat dua garis (misalnya, g dan h) maka g dan h dapat membentuk sudut dengan catatan garis g dan h saling berpotongan atau saling bersilangan. Sudut yang terbentuk dari dua garis tersebut ada empat, maka sudut yang dimaksud adalah sudut lancip (yang paling kecil).
- Jika garis g menembus bidang V , maka garis g dan bidang V akan membentuk sudut yang besarnya sama dengan yang terbentuk antara proyeksi garis g pada bidang V .
- Sudut antara dua bidang (misalnya, V dan W) yang saling berpotongan adalah sudut yang terbentuk oleh dua garis pada masing-masing bidang tersebut di mana garis itu tegak lurus pada garis potong kedua bidang tersebut di satu titik.

KUIS 1

I. Pilihan Ganda

1. $(4x^2y^3) \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{-1}\right) = \dots$

- a. $2x^2$
- b. x^2
- c. $2xy$
- d. xy
- e. 2

2. $\frac{4^3 \times (3,5)^2}{4^3 \times 7^2} = \dots$

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4
- e. 5

3. Jika $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ maka

$$\left[(x \cdot y^3)^{4-2x}\right]^2 \cdot \left[(x \cdot y^3)^{3-1}\right]^2 = \dots$$

- a. $(xy)^{24-12x}$
- b. $(xy)^{12-6x}$
- c. xy
- d. x^2y^{12}
- e. 1

4. $\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{147} = \dots$

- a. $2\sqrt{3}$
- b. $\sqrt{3}$
- c. 0
- d. $-\sqrt{3}$
- e. $-2\sqrt{3}$

5. Bentuk rasional dari $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$ adalah $\dots$

- a. $11 - 2\sqrt{30}$
- b. $11 + 2\sqrt{30}$
- c. $2\sqrt{30} - 11$
- d. $1 + 2\sqrt{30}$
- e. $1 - 2\sqrt{30}$

6. $\sqrt{14 - 8\sqrt{3}} = \dots$

- a. $4 + \sqrt{6}$
- b. $4 - \sqrt{6}$
- c. $\sqrt{8} - \sqrt{6}$
- d. $\sqrt{6} - \sqrt{8}$
- e. c dan d benar

7. $\sqrt{\frac{5}{6}} - 2\sqrt{\frac{1}{6}} = \dots$

- a. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- b. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- c. $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- d. $\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- e. $\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

8. Jika $2^x + 2^x = 5$ maka nilai $4^x + 4^x = \dots$

- a. 5
- b. 16
- c. 23
- d. 25
- e. 27

9. Hasil dari $\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}$ adalah

- a. $x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}$
- b. $x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{3}{4}}$
- c. $x^{\frac{1}{4}} - 2xy + y^{\frac{3}{4}}$
- d. $x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}$
- e. $x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{4}}$

10. $125^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{2}{3}} = \dots$

- a. 2
- b. 1
- c. 0
- d. -1
- e. -2

11. $\sqrt{\frac{8^2 \cdot x^2}{y^4}} = \dots$

- a. $2xy^2$
- b. $4xy^2$
- c. $4xy^2$
- d. $2xy^2$
- e. $4xy$

12. Bentuk $\frac{5^4}{25^{1-3}}$ ekuivalen dengan

- a. 5^{4-6}
- b. 5^{4+6}
- c. 5^{3-6}
- d. 5^{3-6}
- e. 5^6

13. Jika ${}^3\log 3 = p$ dan ${}^2\log 5 = q$ maka nilai ${}^{10}\log 20 = \dots$

- a. $2pq$
- b. $\frac{2+q}{1+p}$
- c. $\frac{1+p}{2+q}$
- d. $\frac{q(1+p)}{2+q}$
- e. $\frac{2+q}{q(1+p)}$

14. $\frac{{}^3\log 2\sqrt{2} + {}^3\log 3\sqrt{3} + {}^3\log 36}{{}^3\log 24 - {}^3\log 4} = \dots$

- a. 3,5
- b. 3
- c. 2,5
- d. 2
- e. 1

15. Jika ${}^3\log 4 = -\frac{3}{2p}$ maka ${}^{12p}\log 27 = \dots$

- a. $\frac{p}{2}$
- b. p
- c. $\frac{3p}{2}$
- d. $-p$
- e. $-\frac{p}{2}$

16. $\frac{1}{{}^{18}\log 100} + \log 5 + \frac{1}{{}^3\log 10} = \dots$

- a. 5
- b. 4
- c. 3
- d. 2
- e. 1

17. Jika ${}^x\log 5 = -0,6$ maka $x = \dots$

- a. $\frac{1}{5}\sqrt[5]{25}$
- b. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$
- c. $\frac{1}{5\sqrt[5]{25}}$
- d. $\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$
- e. $\frac{1}{5\sqrt[5]{125}}$

18. $\frac{\log \frac{1}{a} \sqrt[3]{a^2} + \log \sqrt[3]{b^2} - \log ab^2}{\log \sqrt{ab}} = \dots$

- a. $-1\frac{2}{3}$
- b. $-2\frac{2}{3}$
- c. $-3\frac{2}{3}$
- d. $-4\frac{2}{3}$
- e. $-5\frac{2}{3}$

19. $\left({}^{27}\log 125\right)\left({}^{27}\log \frac{1}{84}\right)\left({}^{44}\log \frac{1}{9}\right) = \dots$

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4
- e. 5

20. Diketahui $\log 5 = 0,699$; $\log 7 = 0,845$ dan $\log 2 = 0,301$ maka $\log 140 = \dots$

- a. 3,845
- b. 3,6902
- c. 2,146
- d. 1,845
- e. -1,222

II. Esai

1. Nyatakan bentuk-bentuk berikut dalam bentuk pangkat bulat positif.

a. $\frac{3x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + 2y^{-1}}$

b. $\frac{xy^{-1} - x^{-1}y}{y^{-1} - x^{-1}}$

2. Tentukan nilai dari:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

3. Tentukan nilai x setiap persamaan berikut.

a. $\frac{6}{7} \cdot 3^{2x-1} + \frac{27^x}{21} = 1$

b. $\frac{3^x}{27^{x+2}} = 81 \sqrt{3^{2x}} \cdot \sqrt{27^{2x}}$

4. Jika $abc \neq 0$ dan $2^a + 3^b = 12^c$, buktikan

bahwa $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$.

KUIS 2

1. Pilihan Ganda

- Akar persamaan kuadrat $5x^2 - 7x + 2 = 0$ yang merupakan bilangan bulat adalah
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
- Akar-akar persamaan $20x^2 - 31x + 12 = 0$ adalah
 - $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$
 - $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$
 - $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
 - $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$
 - $\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{4}\right)$
- Akar-akar persamaan $x^2 - 6x - 2 = 0$ adalah
 - $3 \pm \sqrt{11}$
 - $-3 \pm \sqrt{11}$
 - $6 \pm \sqrt{11}$
 - $3 \pm \sqrt{7}$
 - $-3 \pm \sqrt{7}$
- Himpunan penyelesaian dari persamaan $x + \frac{3}{x} = \frac{3+2x}{x}$ adalah
 - {2}
 - {-2, 0}
 - {0, 2}
 - {6}
 - {0, 6}
- Untuk sembarang nilai k , persamaan kuadrat $x^2 - (2k + 3)x + (3k + 1) = 0$ akan mempunyai
 - dua akar riil yang berlainan
 - dua akar riil yang rasional
 - dua akar riil yang kembar
 - tidak mempunyai akar riil
 - bukan salah satu jawaban di atas
- Agar persamaan $3x^2 - 2mx + (2m - 3) = 0$ mempunyai akar kembar maka nilai $m = \dots$
 - 5
 - 3
 - 1
 - 1
 - 3
- Persamaan $(1 + m^2)x^2 + (2m + 1)x + 1 = 0$ mempunyai akar-akar nyata. Nilai m yang memenuhi adalah
 - $m < -\frac{3}{4}$
 - $m < \frac{3}{4}$
 - $m \geq \frac{3}{4}$
 - $m > -\frac{3}{4}$
 - $m \leq -\frac{3}{4}$
- Diketahui garis $y = 6x - 5$ memotong kurva $y = x^2 - kx + 11$ di titik puncak P . Koordinat titik P adalah
 - (2, 7)
 - (1, 1)
 - (-2, -7)
 - (-1, -11)
 - (3, 13)

9. Jika grafik fungsi $y = x^2 + 2mx + m$ di bawah grafik fungsi $y = mx^2 + 2x$ maka

- $m < 1$
- $m < \frac{1}{2}$
- $m > 1$
- $\frac{1}{2} < m < 1$
- $1 < m < 2$

10. Garis $y = ax + b$ diketahui memotong parabola $y = 2x^2 + 5$ di titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Jika $x_1 + x_2 = 4$ dan $x_1 \cdot x_2 = 3$ maka nilai a dan b adalah

- $a = 8$ dan $b = -2$
- $a = 6$ dan $b = -1$
- $a = -8$ dan $b = -1$
- $a = 8$ dan $b = -1$
- $a = -8$ dan $b = 2$

11. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan $3x^2 + 6x + 2 = 0$ maka nilai $(x_1^2 - x_2^2) + x_1^2 + x_2^2 = \dots$

- 4
- $\frac{16}{3}$
- $\frac{22}{3}$
- 8
- $\frac{32}{3}$

12. Diketahui persamaan kuadrat $3x^2 - (a-1)x - 1 = 0$ mempunyai akar-akar p dan q , sedangkan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{p}$ dan $\frac{1}{q}$ adalah $x^2 - (2b+1)x + b = 0$. Nilai $2a + b = \dots$

- 5
- 7
- 9
- 10
- 11

13. Jika akar-akar persamaan kuadrat $(a-4)x^2 + 4x + 1 = 0$ adalah rasional dan a bilangan cacah maka nilai a adalah

- 4, 7, atau 8
- 3, 5, atau 9
- 2, 1, atau 0
- 0, 1, atau 5
- 5, 7, atau 8

14. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + a = 0$ maka persamaan kuadrat yang akar-akarnya $t_1 = x_1^2 + x_2^2$ dan $t_2 = x_1 + x_2$ adalah

- $x^2 + (2a-4)x + a = 0$
- $x^2 - 2x + 4 - 2a = 0$
- $x^2 - (2a-6)x - 4a + 8 = 0$
- $x^2 + (4a-8)x + 2a - 6 = 0$
- $x^2 - (6-2a)x - 4a + 8 = 0$

15. Diketahui persamaan kuadrat $x^2 + x + 1 = 0$ mempunyai akar-akar p dan q . Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{3}{p} + \frac{3}{q}$ dan $p^2 + q^2$ adalah

- $x^2 + x - 6 = 0$
- $x^2 + x + 6 = 0$
- $x^2 - x - 6 = 0$
- $x^2 - x + 6 = 0$
- $x^2 + x - 12 = 0$

16. Persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 4 = 0$ mempunyai akar-akar p dan q . Persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$ dan $p^2 + q^2$ adalah

- $x^2 + 35x + 96 = 0$
- $x^2 - 32\frac{3}{4}x + 24 = 0$
- $x^2 - 29x - 96 = 0$
- $x^2 + 29x - 96 = 0$
- $x^2 + 29x + 96 = 0$

17. Jika diketahui fungsi kuadrat $y = (x - b)^2 + c$ mempunyai titik minimum di (12, 13) maka nilai $b^2 - c^2 = \dots$
- 25
 - 20
 - 1
 - 1
 - 25
18. Diketahui fungsi $f(x) = -x^2 + (m - 2)x - (m + 2)$ mempunyai nilai maksimum 4. Untuk $m > 0$ maka nilai $m^2 - 8 = \dots$
- 8
 - 6
 - 60
 - 64
 - 92
19. Luas sebuah segitiga siku-siku sama dengan 60 cm^2 . Jika panjang sisi siku-sikunya mempunyai selisih 14 maka sisi siku-siku terpanjang sama dengan
- 12
 - 14
 - 16
 - 18
 - 20
20. Sepotong kawat yang panjangnya 56 cm dibengkokkan membentuk persegi panjang yang luasnya 171 cm^2 . Panjang persegi panjang sama dengan ... cm.
- 17
 - 19
 - 21
 - 22
 - 23
21. Jika jumlah dua bilangan sama dengan 30 maka hasil kali maksimum kedua bilangan tersebut sama dengan
- 30
 - 200
 - 225
 - 250
 - 300
22. Akar-akar dari $x^2 - ax - (a + 4) = 0$ adalah p dan q . Nilai a yang membuat $p^2 + q^2$ minimum adalah
- 2
 - 1
 - 0
 - 1
 - 2
23. Jumlah absis titik-titik potong antara grafik fungsi $f(x) = x - 1$ dan grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah
- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
24. Misal $3x - y = 6$ dan $z = xy$. Nilai minimum dari z sama dengan
- 6
 - 3
 - 2
 - 1
 - 3
25. Pak Dedi akan memagari sebidang tanah yang berbentuk persegi panjang. Jika panjang pagar Pak Dedi adalah 60 meter maka luas tanah maksimum yang dapat dipagari sama dengan
- 120
 - 200
 - 225
 - 240
 - 900

11. Real

1. Carilah akar-akar penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut:

a. $\frac{3x}{2x+1} - \frac{2}{x-2} = 4$

b. $(2x+1)^2 + 2 = x(2x-1)$

2. Diketahui grafik fungsi $f(x) = px^2 + 4x + p$ melalui titik $(2, 3)$.

a. Carilah nilai $a^2 + a$.

b. Gambarkan sketsa grafik fungsi f pada interval $-2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}$.

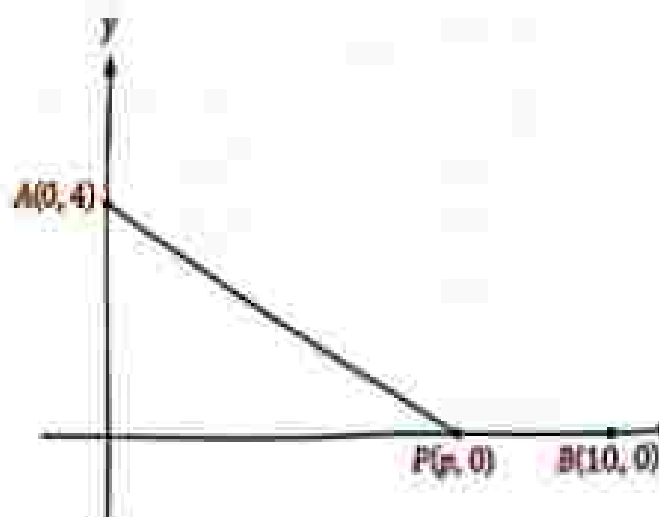
3. Sebuah fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum 9 untuk $x = 2$ dan bernilai nol untuk $x = -1$. Tentukan persamaan fungsi kuadrat tersebut.

4. Jika suatu proyek dapat diselesaikan dalam x hari maka biaya proyek per hari menjadi $\left(3x + \frac{1.200}{x} - 60\right)$ ribu rupiah. Berapa lama waktu yang diperlukan (dalam hari) untuk menyelesaikan proyek agar biaya proyek minimum?

5. Perhatikan gambar berikut.

Titik $P(p, 0)$ terletak di antara titik O dan

B . Tentukan nilai p agar $Z = \frac{1}{4}AP + \frac{1}{5}PB$ minimum.



KUIS 3

1. Pilihan Ganda

1. Diketahui
$$\begin{cases} 3x + 2y = 45 \\ 3y + 2x = 15 \end{cases}$$

Nilai $(x - y)(x + y) - (x + y)^2 = \dots$

- a. 504 d. 216
b. 360 e. 144
c. 348

2. Diketahui
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -1\frac{1}{4} \end{cases}$$

Nilai $x^2 + y^2 = \dots$

- a. 4 d. 10
b. 6 e. 12
c. 8

3. Jika x , y , dan z adalah penyelesaian dari

$$\begin{cases} x + y - z = 24 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ x + 2y - 3z = 36 \end{cases} \text{ maka } x : y : z = \dots$$

- a. 2 : 7 : 1
b. 2 : 5 : 4
c. 2 : 5 : 1
d. 1 : 5 : 2
e. 1 : 2 : 5

4. Jika
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 7 \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = 9 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = 6 \end{cases}$$
 maka $x + y + z = \dots$

- a. 5 d. 9
b. 6 e. 10
c. 8

5. Nilai $x + y + z$ dari sistem persamaan

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x + z = 21 \\ y + z = 9 \end{cases} \text{ adalah } \dots$$

- a. 54
b. 44
c. 34
d. 27
e. 14

6. Himpunan penyelesaian sistem persamaan

$$\begin{cases} x + 3z = 14 \\ 3y + 2z = 17 \\ 2x - y + 3z = 13 \end{cases} \text{ adalah } \{(x, y, z)\}.$$

Nilai $x^2 + y^2 + z^2 = \dots$

- a. 49 d. 27
b. 36 e. 17
c. 29

7. Nilai (x, y) yang memenuhi persamaan

$$\begin{cases} 3x + 2y - 22 = 0 \\ 3x^2 - y^2 - 23 = 0 \end{cases} \text{ adalah } \dots$$

- a. $(-48, 83)$ dan $(4, 5)$
b. $(48, 83)$ dan $(4, 5)$
c. $(83, 48)$ dan $(5, 4)$
d. $(-83, 48)$ dan $(-5, 4)$
e. $(48, -83)$ dan $(-4, 5)$

8. Jika penyelesaian dari persamaan

$$\begin{cases} xy - 8 = 0 \\ (x + y)(x - 2y) = 0 \end{cases} \text{ adalah } (x_1, y_1) \text{ dan } (x_2, y_2), \text{ maka } x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \dots$$

- a. -3 d. 3
b. 0 e. 6
c. 1

9. Titik potong antara parabola $y = x^2 + 5x - 5$ dan garis $y = 7x + 10$ adalah —

- a. $(-3, -11)$ dan $(5, 45)$
- b. $(-2, -4)$ dan $(6, 52)$
- c. $(-1, 3)$ dan $(7, 59)$
- d. $(0, 10)$ dan $(8, 66)$
- e. $(1, 18)$ dan $(9, 73)$

10. Jika p dan q adalah nilai x dan y yang bulat dan memenuhi

$$\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ x^2 - y^2 - 4xy + 3x - 3 = 0 \end{cases}$$

maka nilai $p + q$ sama dengan —

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4
- e. 5

11. Diketahui parabola $y = x^2 + 3x - 10$ dan garis $y = mx + 2$ berpotongan di $(4, 18)$. Titik potong yang lain adalah —

- a. $(3, 10)$
- b. $(2, 10)$
- c. $(-3, -10)$
- d. $(-2, -12)$
- e. $(-1, -12)$

12. Jika $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 - y^2 + xy - 11 = 0 \end{cases}$ mempunyai penyelesaian (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) maka nilai $(x_1 - y_1)$ dan $(x_2 - y_2)$ adalah —

- a. 6 dan 120
- b. 6 dan 126
- c. 8 dan 120
- d. 8 dan 126
- e. 10 dan 124

13. Jika sistem persamaan $\begin{cases} y = px - 2 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases}$ untuk $p > 0$, mempunyai satu penyelesaian maka nilai $p = \dots$

- a. -2
- b. -1
- c. 1
- d. 2
- e. 3

14. Agar garis $y = 4x - m$ tidak berpotongan dan tidak bersinggungan dengan parabola $y = mx^2 + 2mx - 6$ maka nilai m yang memenuhi adalah —

- a. $m < -2$
- b. $m > -2$
- c. $m < 2$
- d. $m > 2$
- e. $0 < m < 2$

15. Pasangan parabola dan garis berikut ini yang saling bersinggungan adalah —

- a. $\begin{cases} y = x^2 + x - 3 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$
- b. $\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ y = x + 2 \end{cases}$
- c. $\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = x + 4 \end{cases}$
- d. $\begin{cases} y = x^2 + x + 6 \\ y = 7x - 3 \end{cases}$
- e. $\begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

16. Penyelesaian dari sistem persamaan:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 10 \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

adalah —

- a. $(1, 9)$ dan $(2, 12)$
- b. $(1, 3)$ dan $(2, 0)$
- c. $(0, 10)$ dan $(1, 9)$
- d. $(-1, 15)$ dan $(-2, 24)$
- e. $(-1, 17)$ dan $(-2, 20)$

17. Penyelesaian sistem $\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 5 \\ y = -x^2 + 4x + 3 \end{cases}$ adalah —

- a. $(0, 6)$ dan $(0, 1)$
- b. $(1, 8)$ dan $(2, 9)$
- c. $(0, 6)$ dan $(1, 8)$
- d. tidak ada penyelesaian
- e. mempunyai tak hingga penyelesaian

18. Jika salah satu anggota penyelesaian

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 2x + a \\ y = x^2 - x + b \end{cases} \text{ adalah } (2, 3) \text{ maka}$$

anggota himpunan penyelesaian yang lain adalah

- $(-5, 31)$
- $(3, -7)$
- $(1, 10)$
- $(-2, 18)$
- $(0, 5)$

19. Sistem $\begin{cases} y = px^2 + 2x + 7 \\ y = 2x^2 + 4x - 5 \end{cases}$ hanya memiliki satu penyelesaian dan $p \neq 2$. Nilai $p = \dots$

- $\frac{5}{4}$
- $\frac{15}{14}$
- $\frac{17}{16}$
- $\frac{25}{24}$
- $\frac{25}{12}$

20. Absis titik potong parabola $y = x^2 + mx + 2$ dan $y = x^2 + 4x - 3$ adalah 2. Nilai $m = \dots$

- 2
- $\frac{1}{2}$
- 1
- $\frac{3}{2}$
- 3

II. Esai

- Keliling sebuah persegi panjang sama dengan 60 cm. Jika panjangnya dibuat menjadi tiga kali panjang semula dan lebarnya dibuat menjadi sepertiga kali lebar semula maka keliling persegi panjang tersebut menjadi 116 cm. Tentukan luas persegi panjang mula-mula.
- Dalam suatu pertandingan voli, terjual karcis kelas I dan kelas II sebanyak 500 lembar. Harga karcis kelas I dan kelas II berturut-turut adalah Rp5.000,00 dan Rp3.000,00. Jika hasil penjualan seluruh karcis adalah Rp1.900.000,00, tentukan banyak karcis kelas I dan kelas II masing-masing yang terjual.
- Seorang pengusaha mempunyai 9 gudang. Menurut besarnya, ada dua macam gudang, yaitu yang mempunyai daya tampung 15 m³ dan 9 m³. Jika diketahui bahwa daya tampung seluruhnya adalah 105 m³, tentukan banyak gudang yang mempunyai daya tampung 15 m³.
- Diketahui jumlah 3 bilangan adalah 4. Bilangan pertama dikurang dua kali bilangan kedua dikurang bilangan ketiga hasilnya sama dengan 1. Dua kali bilangan pertama kurang bilangan kedua kurang dua kali bilangan ketiga hasilnya sama dengan -1. Tentukan jumlah bilangan pertama dan kedua.
- Dari tiga buah kubus, diketahui perbandingan panjang rusuk-rusuknya adalah 1 : 3 : 5. Jika jumlah semua panjang rusuk ketiga kubus tersebut adalah 216 cm, tentukan panjang rusuk setiap kubus tersebut.
- Dalam suatu segitiga, sudut terbesarnya adalah 100° lebih besar daripada sudut terkecilnya dan tiga kali dari sudut sisanya. Tentukan besarnya masing-masing sudut tersebut.

KUIS 4

I. Pilihan Ganda

1. Jika $a > b$ dan $c > d$ maka ...

- a. $a + d = b + c$
- b. $a + c < b + d$
- c. $a + c > b + d$
- d. $a = c$
- e. $a < d$

2. Jika $3x + 1 < 2x + 11$ maka ...

- a. $x < 1$
- b. $x < 2$
- c. $x < 5$
- d. $x < 10$
- e. $x < 12$

3. Jika $-3 < x < 5$ dan $-7 < y < 3$ maka dapat disimpulkan bahwa ...

- a. $-10 < x - y < 2$
- b. $4 < x - y < 8$
- c. $-6 < x - y < 1$
- d. $-3 < x - y < 6$
- e. $1 < x - y < 3$

4. Nilai terbesar x agar $x - \frac{3}{4}x \geq \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}$ adalah ...

- a. 1
- b. -1
- c. -2
- d. -3
- e. -4

5. Jika pertidaksamaan $2x - 3a > \frac{3x-1}{2} + ax$ mempunyai penyelesaian $x > 5$ maka nilai a adalah ...

- a. $-\frac{3}{4}$
- b. $-\frac{3}{8}$
- c. $\frac{3}{8}$
- d. $\frac{1}{4}$
- e. $\frac{3}{4}$

6. Nilai x yang memenuhi $-x^2 + 2x + 15 < 0$ adalah ...

- a. $-3 < x < 5$
- b. $-5 < x < 3$
- c. $3 < x < 5$
- d. $x < -3$ atau $x > 5$
- e. $x < -5$ atau $x > 3$

7. Himpunan penyelesaian dari $x^2 - 4x - 12 \leq 0$ dan $3x > 5$ adalah ...

- a. $\{x \mid 1 < x \leq 6\}$
- b. $\{x \mid 1 \leq x \leq 6\}$
- c. $\{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$
- d. $\left\{x \mid \frac{5}{3} \leq x \leq 6\right\}$
- e. $\left\{x \mid \frac{5}{3} < x \leq 6\right\}$

8. Jika $y = 2x + 1$ dan $x^2 - 8x + 15 < 0$ maka nilai y yang memenuhi adalah ...

- a. $4 < y < 6$
- b. $5 < y < 9$
- c. $6 < y < 10$
- d. $7 < y < 11$
- e. $8 < y < 12$

9. Jika $P = \{x \mid x^2 - 3x - 40 < 0\}$ dan

$Q = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$ maka $P \cap Q = \dots$

- a. $\{x \mid -5 < x \leq -2 \text{ atau } 3 \leq x < 8\}$
- b. $\{x \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ atau } 5 < x < 8\}$
- c. $\{x \mid -3 \leq x \leq 0 \text{ atau } 2 \leq x < 8\}$
- d. $\{x \mid -5 < x < 8\}$
- e. $\{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$

10. Supaya persamaan $tx^2 - (t-2)x + t = 0$ selalu mempunyai akar-akar yang tidak riil maka nilai t yang memenuhi adalah ...

- a. $-2 < t < \frac{2}{3}$
- b. $-2 < t < \frac{3}{2}$
- c. $-\frac{2}{3} < t < 2$
- d. $t < -2$ atau $t > \frac{2}{3}$
- e. $t < -\frac{2}{3}$ atau $t > 2$

11. Nilai x yang memenuhi $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 3} < 0$ terletak pada selang ...

- a. $1 < x < 3$
- b. $1 < x < 2$
- c. $2 < x < 3$
- d. $1 < x < 2$ atau $2 < x < 3$
- e. $1 < x < 2$ dan $2 < x < 3$

12. Grafik fungsi $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + x - 6}$ berada

- 1. di atas sumbu- x untuk $-3 < x < 1$
 - 2. di atas sumbu- x untuk $1 < x < 2$
 - 3. di bawah sumbu- x untuk $-6 < x < -3$
 - 4. di bawah sumbu- x untuk $-3 < x < 2$
- Pernyataan yang benar adalah ...

- a. 1, 2, dan 3
- b. 1 dan 3
- c. 2 dan 4
- d. 4
- e. semua benar

13. Dari suatu persegi panjang, panjangnya lebih 3 cm dari pada lebarnya. Jika lebarnya x cm dan luasnya paling sedikit 15 cm^2 maka sistem pertidaksamaan harus dipenuhi oleh ...

- a. $x > 0, x(x+3) \geq 15$
- b. $x > 0, x(x-3) \geq 15$
- c. $x > 0, x(x+3) \leq 15$
- d. $x > 0, x(x+3) \leq 15$
- e. $x > 0, 3x^2 \geq 15$

14. Penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x-3}{2x-1} \text{ adalah ...}$$

- a. $-7 \leq x \leq \frac{1}{2}$ atau $1 \leq x < 2$
- b. $-7 \leq x < \frac{1}{2}$ atau $1 \leq x < 2$
- c. $x \leq -7$ atau $\frac{1}{2} < x \leq 1$ atau $x > 2$
- d. $x \leq -7$ atau $1 \leq x < 2$ atau $x > 3$
- e. $x < \frac{1}{2}$ atau $x > 2$

15. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{6x - 4} < 0 \text{ adalah ...}$$

- a. $1 < x < \frac{2}{3}$ atau $\frac{2}{3} < x < 4$
- b. $x < -1$ atau $\frac{2}{3} < x < 4$
- c. $-1 < x < \frac{2}{3}$ dan $x > 4$
- d. $x < -1$ dan $\frac{2}{3} < x < 4$
- e. $x > -1$ dan $x < 4$

16. $\frac{3}{x^2 - 3x + 2} < \frac{5}{x^2 - 4x + 3}$ berlaku untuk ...

- a. $x > \frac{1}{2}$
- b. $x > 2$
- c. $x > 3$
- d. $\frac{1}{2} < x < 3$
- e. $2 < x < 3$

17. Penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{8x^2 - 3x + 10}{5x - 2} \leq 2x - 1 \text{ adalah ...}$$

- a. $-1 \leq x \leq \frac{2}{5}$ atau $x \geq 4$
- b. $\frac{2}{5} \leq x \leq 4$ atau $x \leq -1$
- c. $-1 \leq x < \frac{2}{5}$ atau $x \geq 4$
- d. $\frac{2}{5} < x \leq 4$ atau $x \leq -1$
- e. $x < -1$ atau $x > 4$

18. Penyelesaian dari $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} < 0$ dan

$$\frac{x}{x-3} < 0 \text{ adalah ...}$$

- a. $x < 1 - \sqrt{2}$ atau $x > 3$
- b. $x < 0$ atau $x > 1 + \sqrt{2}$
- c. $x < 0$ atau $x > 3$
- d. $0 < x < 3$
- e. $0 < x < 1 + \sqrt{2}$

19. Jika $(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 6) < 0$ maka nilai x yang memenuhi adalah ...

- a. $x > -1$
- b. $x < -3$
- c. $-1 < x < 2$
- d. $-1 < x < 2$
- e. $-3 < x < -1$

20. Penyelesaian dari $\frac{x^2 - 3x - 18}{(x - 6)^2 (x - 2)} < 0$ adalah ...

- a. $-3 < x < 6$
- b. $2 < x < 6$ atau $x < -3$
- c. $-3 < x < 2$
- d. $x > -3$
- e. $2 < x < 6$

II. Esai

1. Tentukan himpunan penyelesaian tiap pertidaksamaan berikut.

a. $18x - 5 - 9x^2 \geq 0$

b. $\frac{2x^2 - 7x - 4}{3x^2 + 7x - 6} < 0$

2. Tentukan batas-batas nilai x agar parabola $y = 4x^2 + 3x - 2$ selalu berada di atas parabola $y = 3x^2 + 4x + 16$.

3. Carilah nilai p agar persamaan kuadrat $2px^2 - 16x + 16 = 0$ mempunyai dua akar kembar dan tentukan akarnya.

KUIS 5

1. Pilihan Ganda

- Dari setiap kalimat berikut,
 - Bandung adalah kota besar
 - Ada $x \in \mathbb{R}$ sehingga $2x^2 - 4x = 0$
 - Sepak bola lebih menarik daripada bulu tangkis
 - ${}^{\eta}\log 234 = 4$
 yang termasuk pernyataan adalah
 - 1 dan 3
 - 2 dan 4
 - 1, 2 dan 3
 - 1 dan 4
 - semua
- Pernyataan berikut yang bernilai salah adalah
 - Grafik $f(x) = x^2 + 2x + 1$ memotong sumbu x pada $(-1, 0)$
 - $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 - 5 adalah bilangan prima walaupun 5 bukan bilangan komposit
 - $2x - 5 - 2x^2 < 0$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$
 - Jika Surabaya (bukota Provinsi Jawa Tengah maka Inggris terletak di Eropa
- Pernyataan Implikasi "Jika ${}^{\eta}\log 16 = x$ maka $x^2 - 9 < 0$ " bernilai salah untuk $x = \dots$
 - $\frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{2}$
 - 2
 - 4
 - 8
- Nilai x agar pernyataan " $x^2 - 3x - 10 > 0$ dan $|x| < 4$ " bernilai benar adalah
 - $x < -2$ atau $x > 5$
 - $-4 < x < 5$
 - $-4 < x < -2$
 - $-4 < x < 4$
 - $-4 < x < -2$ atau $x > 5$
- Jika pernyataan $(\neg p \vee q) \Rightarrow q$ bernilai salah maka pernyataan berikut yang bernilai salah adalah
 - $\neg p$
 - $(\neg p \wedge q) \vee p$
 - $(p \vee \neg q) \wedge \neg p$
 - $p \Rightarrow \neg q$
 - $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg q$
- Negasi dari implikasi "Jika $x - 3 = 0$ maka $x^2 - 4x + 4 = 0$ " adalah
 - Jika $x - 3 \neq 0$ maka $x^2 - 4x + 3 = 0$
 - Jika $x - 3 = 0$ maka $x^2 - 4x + 3 \neq 0$
 - $x - 3 = 0$ tetapi $x^2 - 4x + 3 \neq 0$
 - $x - 3 \neq 0$ tetapi $x^2 - 4x + 3 = 0$
 - Jika $x - 3 \neq 0$ maka $x^2 - 4x + 3 = 0$
- Invers dari "Jika saya pandai berenang maka saya ikut lomba" adalah
 - Jika saya ikut lomba maka saya pandai berenang
 - Jika saya tidak ikut lomba maka saya tidak pandai berenang
 - Jika saya tidak pandai berenang maka saya tidak ikut lomba
 - Saya tidak ikut lomba walaupun saya pandai berenang
 - Saya pandai berenang dan saya ikut lomba
- Negasi dari "Ulangan dibatalkan jika dan hanya jika diadakan kerja bakti" adalah
 - Kerja bakti diadakan jika dan hanya jika ulangan dibatalkan
 - Ulangan tidak dibatalkan atau tidak diadakan kerja bakti
 - Jika ulangan tidak dibatalkan maka tidak diadakan kerja bakti
 - Kerja bakti diadakan dan ulangan tidak dibatalkan
 - Ulangan dibatalkan jika dan hanya jika tidak diadakan kerja bakti

9. Ingkaran dari " $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $x = 60^\circ$ atau $x = 120^\circ$ " adalah ...

- a. $\sin x \neq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $x \neq 60^\circ$ atau $x \neq 120^\circ$
- b. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $x = 60^\circ$ dan $x \neq 120^\circ$
- c. $\sin x \neq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $x \neq 60^\circ$ dan $x = 120^\circ$
- d. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $x \neq 60^\circ$ dan $x \neq 120^\circ$
- e. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ jika dan hanya jika $x \neq 60^\circ$ atau $x \neq 120^\circ$

10. Pernyataan berikut yang kontradiksi adalah ...

- a. $p \wedge (p \vee \neg q)$
- b. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- c. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- d. $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
- e. $(\neg p \vee q) \wedge (q \Leftrightarrow p)$

11. Jika pernyataan "Jika sekarang hari Minggu maka saya pergi ke Ancol" bernilai salah maka pernyataan berikut yang bernilai benar adalah ...

- a. Sekarang hari Minggu jika dan hanya jika saya pergi ke Ancol
- b. Sekarang bukan hari Minggu atau saya pergi ke Ancol
- c. Jika saya tidak pergi ke Ancol maka sekarang bukan hari Minggu
- d. Saya pergi ke Ancol dan sekarang hari Minggu
- e. Saya tidak pergi ke Ancol walaupun sekarang hari Minggu

12. Pernyataan yang ekuivalen dengan "Jika laut pasang maka tiang dermaga tenggelam" adalah ...

- a. Jika laut surut maka tiang dermaga tampak
- b. Jika laut pasang maka tiang dermaga tidak tenggelam
- c. Jika tiang dermaga tampak maka laut tidak pasang
- d. Jika laut tidak pasang maka tiang dermaga tampak
- e. Jika laut tidak pasang maka tiang dermaga tenggelam

13. Nilai x agar pernyataan " $x^2 - 2x + 3 > 0$ dan $|x| > 2$ " menjadi benar adalah ...

- a. $-1 < x < 3$
- b. $x < -1$ atau $x > 2$
- c. $x < -2$ atau $x > 3$
- d. $x < -1$ atau $x > 3$
- e. $2 < x < 3$

14. Pernyataan berikut yang tautologi adalah ...

- a. $p \wedge (p \vee \neg q)$
- b. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- c. $(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- d. $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
- e. $(\neg p \vee q) \wedge (q \Leftrightarrow p)$

15. Kontraposisi dari $(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ adalah ...

- a. $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- b. $(\neg p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- c. $\neg p \wedge q \Rightarrow (p \vee q)$
- d. $(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$
- e. $(p \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge q)$

16. Jika p dan q suatu pernyataan maka $p \wedge (p \vee q)$ ekuivalen dengan pernyataan

- a. q
- b. p
- c. $\neg q$
- d. $\neg p \wedge \neg q$
- e. $\neg p$

17. Ingkaran untuk kontraposisi dari

$p \Rightarrow q$ adalah

- a. $\neg q \vee p$
- b. $q \vee p$
- c. $p \vee \neg q$
- d. $\neg q \wedge p$
- e. $q \Rightarrow p$

18. Nilai kebenaran dari $p \Rightarrow \neg(p \vee q)$ adalah

- a. SBSB
- b. SSBB
- c. SBBS
- d. BBSS
- e. BSSB

19. Sebuah pernyataan berbunyi "Jika $x = 4$ maka $x^2 = 16$ ". Ini berarti bahwa

- a. Jika $x = -4$ maka $x^2 = 16$
- b. Jika $x^2 = 16$ maka $x = 4$
- c. Jika $x \neq 4$ maka $x^2 = 16$
- d. Jika $x^2 \neq 16$ maka $x \neq 4$
- e. Jika $x \neq 4$ maka $x^2 \neq 16$

20. Nilai kebenaran dari:

$(p \vee q) \Rightarrow \neg(p \wedge q)$ adalah

- a. SBBB
- b. SBSB
- c. SSBB
- d. SBBS
- e. SBSS

II. Esai

1. Jika P adalah pernyataan dan BP adalah bukan pernyataan, berilah tanda (✓) pada kolom yang disediakan dalam tabel berikut.

	Kalimat	P	BP
a.	Setiap bilangan prima adalah ganjil		
b.	Buanglah sampah pada tempatnya		
c.	Terdapat bilangan bulat a dan b sedemikian sehingga $a + 3b = 12$		
d.	$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}$		
e.	Nanti malam akan turun hujan		
f.	Dua bukan bilangan prima		
g.	Setiap bilangan genap habis dibagi dua		
h.	Padang adalah ibu kota Provinsi Sumatera Utara		
i.	$x + 10 < 5$		
j.	$3 \times 25 = 9$		
k.	Amir adalah anak yang pandai		
l.	Ani adalah anak yang cantik		

2. Jika B menyatakan pernyataan yang bernilai benar dan S menyatakan pernyataan yang bernilai salah, berilah tanda (✓) pada kolom yang disediakan dalam tabel berikut:

	Pernyataan	B	S
a.	$2^3 = 8$ dan Bogor terletak di Jawa Barat		
b.	$x^2 - 3x + 5 < 0, x \in \mathbb{R}$		
c.	${}^7\log 81 = \frac{1}{4}$ atau $\tan 60^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{3}$		
d.	Jika $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka $\tan 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$		
e.	${}^2\log \frac{1}{32} = x$ jika dan hanya jika $x = -4$		
f.	Grafik $y = 3x^2 - 2x + 5$ memotong sumbu y pada $(0, 5)$		

3. Buktikan bahwa : $(\neg p \vee q) \vee r \equiv (p \Rightarrow q) \vee r$.
4. Termasuk tautologi, kontradiksi, atau kontingensikah pernyataan-pernyataan berikut?
- $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg p)$
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \wedge p$
5. Tentukan nilai a sehingga:
- Jika $x^2 + ax + 1 = 0$ memiliki akar kembar maka $\tan 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ bernilai salah.
 - $a^2 - 4a = 0$ dan $a^2 - 8a + 16 = 0$ bernilai benar.

KUIS 6

I. Pilihan Ganda

- Diberikan $\sin \theta = \frac{8}{10}$ dengan θ adalah sudut lancip. Nilai $\cos \theta = \dots$
 - 0,4
 - 0,5
 - 0,6
 - 0,7
 - 0,8
- $\frac{\sin^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ} = \dots$
 - 1
 - $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 - $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 - $\frac{1}{4}\sqrt{3}$
 - 0
- Diketahui $\tan x = 2,4$ dengan x dalam selang $(180^\circ, 270^\circ)$. Nilai $\cos x = \dots$
 - $-\frac{12}{13}$
 - $-\frac{5}{13}$
 - $\frac{3}{13}$
 - $\frac{5}{13}$
 - $\frac{12}{13}$
- Jika $\tan x = a$ dengan x berada pada selang $90^\circ < x < 180^\circ$ maka $\sin x \cdot \cos x = \dots$
 - $\sqrt{1+a^2}$
 - $\frac{a}{1+a^2}$
 - $\frac{-a}{1+a^2}$
 - $\frac{a^2}{1+a^2}$
 - $\frac{-a^2}{1+a^2}$
- $\cos 180 - \sin 210 - \operatorname{cosec} (-90) + \sec 0$ bernilai
 - 1,5
 - 1
 - 0,5
 - 0,5
 - 1,5
- Jika $\frac{\sin x + \cos 60^\circ}{\sin 150 - \sin 270^\circ} = 0$ maka nilai x yang memenuhi adalah
 - 120°
 - 150°
 - 180°
 - 210°
 - 240°
- Periode dari fungsi $y = 2 + \tan 3x$ adalah
 - 60°
 - 120°
 - 180°
 - 240°
 - 360°
- Untuk interval $90^\circ < x < 120^\circ$ maka grafik dari $y = 2 \sin 3x$
 - berada di atas sumbu- x
 - berada di bawah sumbu- x
 - memotong sumbu- y di dua titik
 - terbuka ke bawah
 - ada di atas sumbu- x dan ada di bawah sumbu- x
- Persamaan $\tan (5x - 40)^\circ = \cot 50^\circ$ adalah benar untuk $x = \dots$
 - 16
 - 42
 - 52
 - a dan b benar
 - a dan c benar
- Akar-akar persamaan $4 \sin^2 x = 1$ yang terletak di dalam $0 < x < \pi$ adalah
 - $\frac{1}{6}\pi$
 - $\frac{1}{3}\pi$
 - $\frac{1}{2}\pi$
 - $\frac{1}{6}\pi$ atau $\frac{5}{6}\pi$
 - $\frac{1}{3}\pi$ atau $\frac{2}{3}\pi$
- Jika $\tan x = 3$ maka $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}$ bernilai
 - 20
 - 10
 - 5
 - 0,2
 - 0,1

12. Jika $p - q = \cos A$ dan $\sqrt{2pq} = \sin A$ maka $p^2 + q^2 = \dots$

- a. -1 d. 0,5
b. 0 e. 1
c. 0,25

13. Jika $5 \sin \alpha = 2 \cos \alpha$ dan α berada di kuadran I maka $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \dots$

- a. $\frac{9}{29}$ d. $\frac{20}{25}$
b. $\frac{20}{29}$ e. $\frac{4}{25}$
c. $\frac{21}{29}$

14. $\tan^2 160^\circ - \operatorname{cosec}^2 70^\circ = \dots$

- a. 3 d. 0
b. 2 e. -1
c. 1

15. Jika $\tan B = \frac{3}{7}$ maka nilai dari

$$\frac{14 \sin B - 3 \cos B}{7 \sin B - 5 \cos B} = \dots$$

- a. 2,5 d. -1,5
b. 2 e. -2
c. 1,5

16. Pada $\triangle ABC$ diketahui $a + b = 10$, $A = 30^\circ$ dan sudut $B = 45^\circ$. Panjang sisi $b = \dots$

- a. $5(\sqrt{2} - 1)$ d. $10(\sqrt{2} + 1)$
b. $5(2 - \sqrt{2})$ e. $10(\sqrt{2} + 1)$
c. $10(2 - \sqrt{2})$

17. Diketahui $\triangle ABC$ dengan $AC = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm,

$BC = 10$ cm, dan sudut $A = 60^\circ$. Besar sudut C adalah $\dots$

- a. 105° d. 55°
b. 90° e. 45°
c. 75°

18. Pada $\triangle ABC$ diketahui $\cos(B + C) = \frac{9}{40}$. Jika

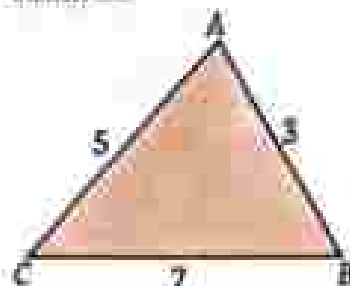
panjang sisi $AC = 10$ cm dan $AB = 8$ cm, panjang sisi $BC = \dots$ cm.

- a. 8 d. 11
b. 9 e. 12
c. 10

19. Dari $\triangle ABC$ diketahui $a = 4$ cm dan $b = 3$ cm. Jika luas segitiga = 6 cm^2 maka sudut $C = \dots$

- a. 120° d. 45°
b. 90° e. 30°
c. 60°

20. Pada gambar berikut, nilai $\sin A + \sin B$ adalah $\dots$



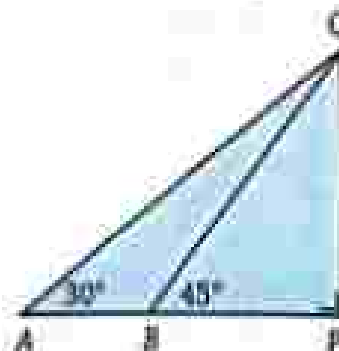
- a. $\sin C$ d. $4 \sin C$
b. $2 \sin C$ e. $5 \sin C$
c. $3 \sin C$

II. Soal

1. Tentukan nilai dari

$$\frac{\sin 45^\circ \cdot \sin 135^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \sin 330^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \cos 225^\circ \cdot \cos 240^\circ \cdot \cos 300^\circ}$$

2. Perhatikan gambar berikut. Jika panjang $AB = 100$ m, tentukanlah panjang PQ .



3. Jika $\tan(2x + 10)^\circ = \cot(3x - 15)^\circ$, tentukan nilai x yang memenuhi.

4. Dari suatu tempat A, terlihat puncak gunung dengan sudut elevasi 30° . Dari tempat B yang jaraknya 100 m lebih dekat ke kaki gunung, terlihat puncak gunung dengan sudut elevasi 60° . Tentukan tinggi gunung tersebut.

5. Diketahui sisi-sisi pada segitiga ABC berbanding $6 : 5 : 4$. Berapakah kosinus sudut terbesar dari segitiga tersebut?

KUIS 7

I. Pilihan Ganda

- Sebuah logam berbentuk balok dimasukkan ke dalam tabung yang berisi air. Jika balok itu berukuran $11 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ dan diameter alas tabung 28 cm maka tinggi air yang naik adalah ... cm.
 - $0,425$
 - $0,525$
 - $0,625$
 - $0,725$
 - $0,825$
- Di dalam sebuah kubus yang panjang rusuknya 6 cm , terdapat sebuah bola. Jika permukaan bola menyentuh keenam sisi kubus dan ketebalan dinding kubus dan bola diabaikan maka perbandingan volume kubus dengan volume bola adalah
 - $4 : \pi$
 - $5 : \pi$
 - $6 : \pi$
 - $6 : 2\pi$
 - $7 : 2\pi$
- Luas dua buah bola masing-masing L_1 dan L_2 . Jika $r_1 = 3r_2$, maka perbandingan luas kedua bola itu adalah
 - $1 : 5$
 - $1 : 6$
 - $1 : 7$
 - $1 : 8$
 - $1 : 9$
- Alas sebuah prisma berbentuk trapesium siku-siku dengan panjang sisi yang sejajar adalah 13 cm dan 7 cm , dan tinggi trapesium adalah 8 cm . Jika tinggi prisma adalah 15 cm maka luas sisi prisma adalah ... cm^2 .
 - 700
 - 710
 - 720
 - 730
 - 740
- Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 3 . Titik P terletak pada BF dengan $BP : PF = 1 : 2$ dan titik Q terletak pada FG dengan $FQ : QG = 2 : 1$. Jarak titik D ke garis PQ sama dengan
 - 5
 - $4\frac{8}{13}$
 - 4
 - $3\frac{8}{13}$
 - 3
- Diketahui bidang empat $TABC$ panjang tiap rusuknya sama dengan 2 . Jarak antara setiap rusuk yang bersilangan adalah
 - $\sqrt{2}$
 - $\sqrt{3}$
 - $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
 - $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
 - $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 4 cm . Jarak bidang APH dengan bidang BDG sama dengan
 - 3
 - $2\sqrt{2}$
 - $\frac{3}{4}\sqrt{2}$
 - 4
 - $\frac{4}{3}\sqrt{3}$
- Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = 4 . P adalah titik tengah GH . Jika α adalah sudut yang dibentuk EP dan CP maka $\sin \alpha = \dots$
 - $\frac{2}{5}\sqrt{6}$
 - $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
 - $\frac{4}{5}$
 - $\frac{1}{5}\sqrt{15}$
 - $\frac{1}{5}$

Pada prisma segitiga tegak $ABCDEF$, $AB = BC = \sqrt{5}$, $AC = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$. Jika P terletak pada pertengahan DF maka besar sudut yang dibentuk BP dengan $PE = \dots$

- a. 30°
- b. 45°
- c. 60°
- d. 75°
- e. 90°

10. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk = a . Misal α adalah sudut yang dibentuk bidang BDE dengan bidang BDG maka nilai $\sin \alpha = \dots$

- a. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
- b. $\sqrt{2}$
- c. $\frac{1}{2}$
- d. $\frac{2}{5}\sqrt{2}$
- e. $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

11. Essai

1. Pada balok $ABCD.EFGH$, $AB = 12$, $BC = 3$ dan $BF = 4$. Tentukan jarak titik B dengan garis AG .
2. Pada kubus $ABCD.EFGH$ panjang rusuknya 6 cm, tentukan jarak antara garis AF dengan EG .
3. Sebuah bujur sangkar $ABCD$ adalah alas dari limas $T.ABCD$. Jika $AB = 6$ cm dan tinggi limas 4 cm, tentukan jarak A terhadap TBC .
4. Pada bidang empat $T.ABC$ diketahui bahwa TAB , TAC dan ABC saling tegak lurus. Jika $TA = AB = AC$ dan jarak titik A terhadap TBC adalah $2\sqrt{2}$, tentukan volume $T.ABC$.
5. Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 4$, $BC = 2$ dan $BF = 3$. Titik P berada pada garis AB dengan $AP : PB = 3 : 1$, titik Q berada pada garis GH dengan $GQ : QH = 3 : 1$. Tentukan jarak garis BQ dengan garis PC .
6. Jika panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH$ adalah 6, tentukan panjang proyeksi AE pada bidang BDG .
7. Panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH$ adalah a . Adapun P , Q dan R berturut-turut adalah titik tengah BF , CD dan AD . Jika α sudut EP dan QR , tentukan $\tan \alpha$.
8. $ABCD.EFGH$ adalah sebuah kubus. Jika α adalah sudut antara diagonal AG dan rusuk AD , tentukan $\cos \alpha$.
9. Pada kubus $ABCD.EFGH$, P adalah titik tengah FG dan Q adalah titik tengah EH . Jika α adalah sudut antara bidang $ABGH$ dan bidang $ABPQ$, tentukan $\tan \alpha$.
10. Dalam kubus $ABCD.EFGH$. Jika α adalah sudut antara bidang AEF dan CHF , tentukan $\cos \alpha$.

KUIS

PENUTUP

1. Pilihan Ganda

- Jika $a + b = 0$ maka $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}$ senilai dengan ...
 - $\frac{a+b}{ab}$
 - $\frac{ab}{2(a+b)}$
 - $\frac{ab}{a+b}$
 - $\frac{ab}{a^2 - b^2}$
 - $\frac{a-b}{a+b}$
- $\frac{3 \cdot 2^{n+2} - 2^{n+4}}{2^{n+3}} = \dots$
 - 3
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
- $\left(\sqrt{\frac{2^3}{3^4}} \right)^4 \cdot 6^3 : \left(\sqrt{2^3 \cdot 3^4} \right)^3 = \dots$
 - $2^{17} \cdot 3^{12}$
 - $2^{17} \cdot 3^{11}$
 - 3^{17}
 - $2^{12} \cdot 3^{12}$
 - 2^{11}
- Bentuk $\left(\frac{4}{3 + \sqrt{3}} \right)^2$ dapat dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{c}$ dengan a , b , dan c merupakan bilangan bulat. Nilai $a - b = \dots$
 - 8
 - 12
 - 20
 - 32
 - 80
- Nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{5^{-x}}{25^{1-3x}} = 125^{x+3}$ adalah ...
 - 4
 - 2
 - 1
 - 2
 - 4
- Jika $p = 0,6666\dots$ dan $q = 0,4444\dots$ maka $\frac{\log q}{\log p} = \dots$
 - $\frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{1}{2}$
 - 2
 - 3
- Jika ${}^m \log 7 = m$ maka ${}^{27} \log \sqrt[3]{\frac{1}{49}} = \dots$
 - $\frac{2}{3}m$
 - $\frac{3}{2}m$
 - $-\frac{2}{9}m$
 - $\frac{2}{9}m$
 - $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}$
- Salah satu akar persamaan kuadrat $(3 - r)x^2 - 2rx + 12 = 0$ adalah 1. Nilai r dan akar yang lain adalah ...
 - 5 dan -3
 - 5 dan 3
 - 5 dan -6
 - 5 dan -6
 - 5 dan 6

9. Persamaan kuadrat berikut yang pasti mempunyai dua akar riil yang berbeda adalah ...

- a. $x^2 + 6x + 9 = 0$
- b. $x^2 + 3x - p = 0$
- c. $x^2 + 2px + p^2 - r^2 = 0$
- d. $x^2 - 4x + 4 + p^2 = 0$
- e. $px^2 + px - p = 0$

10. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + px + 4$ mempunyai perbandingan 1:2. Nilai $p = \dots$

- a. -5
- b. -6
- c. -7
- d. -8
- e. -9

11. Sebuah kotak terbuka dengan alas berbentuk persegi akan dibuat dari karton seluas 108 m^2 . Jika tinggi kotak adalah 3 cm maka panjang sisi alas kotak adalah ...

- a. 30 cm
- b. 24 cm
- c. 18 cm
- d. 12 cm
- e. 6 cm

12. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 4x + a$ mempunyai nilai minimum -6. Fungsi $g(x) = ax^2 - 2ax + 1$ mempunyai nilai ...

- a. maksimum 3
- b. maksimum 4
- c. minimum 3
- d. minimum 4
- e. maksimum 5

13. Fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(-1, 3)$ dan titik terendahnya sama dengan puncak grafik $f(x) = x^2 + 4x + 3$ adalah ...

- a. $y = 4x^2 + x + 3$
- b. $y = x^2 - 3x - 1$
- c. $y = 4x^2 + 16x + 15$
- d. $y = 4x^2 + 15x + 16$
- e. $y = x^2 + 16x + 18$

14. Jika $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ maka pernyataan berikut yang benar adalah ...

- a. $10x = -1$
- b. $10x = 1$
- c. $14x = -1$
- d. $14x = 1$
- e. $10x = 31$

15. Diketahui sistem persamaan $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 6x + 4y = 21 \end{cases}$. Sistem persamaan ini ...

- a. tidak mempunyai penyelesaian
- b. mempunyai penyelesaian yang unik
- c. mempunyai dua penyelesaian
- d. mempunyai tiga penyelesaian
- e. mempunyai tak hingga penyelesaian

16. Dari dua toko A dan B, diperoleh data penjualan udang dan cumi dalam satu minggu seperti tercantum pada tabel berikut.

	Udang	Cumi	Hasil penjualan total (dalam ribuan rupiah)
Toko A	30	20	2.000
Toko B	20	40	3.000

Jumlah harga cumi per kg di kedua toko tersebut adalah ...

- a. Rp16.000,00
- b. Rp18.000,00
- c. Rp20.000,00
- d. Rp25.000,00
- e. Rp32.000,00

17. Titik potong parabola $y = x^2 - 2x + 3$ dan parabola $y = x^2 - x - 2$ adalah ...

- a. (5,18)
- b. (1,2)
- c. $\left(\frac{5}{3}, \frac{-8}{9}\right)$
- d. (5,18) dan (1,2)
- e. (1,2) dan $\left(\frac{5}{3}, \frac{-8}{9}\right)$

18. Jika x , y , dan z adalah penyelesaian sistem

$$\text{persamaan } \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2y + z = -2 \\ x - y = 5 \end{cases} \text{, nilai } x - z = \dots$$

- a. -2
- b. -1
- c. 0
- d. 1
- e. 2

19. Diketahui jumlah tiga bilangan sama dengan 50. Jika bilangan terkecil dibagi 3 maka hasilnya akan sama dengan bilangan terbesar dibagi 7. Jika bilangan terkecil dan menengah dijumlahkan hasilnya akan sama dengan bilangan terbesar ditambah 8. Bilangan terbesarnya adalah

- a. 15
- b. 17
- c. 19
- d. 20
- e. 21

20. Diketahui parabola $y = mx^2 - (m + 3)x - 1$ dan garis lurus $y = x - \frac{1}{2}$. Jika parabola dan garis lurus itu saling bersinggungan, nilai m adalah

- a. -2 atau 8
- b. -4 atau 4
- c. 2 atau -8
- d. -2 atau -8
- e. 2 atau 8

21. Garis yang sejajar dengan $2x + y = 15$ akan memotong kurva $y = 6 + x - x^2$ di titik $(4, -6)$ dan

- a. $(-4, 14)$
- b. $(1, -4)$
- c. $(-1, 4)$
- d. $(2, 4)$
- e. $(1, 6)$

22. Jika $p = q$ maka

- a. $p - x < q - y$, jika $x > y$
- b. $p - x > q - y$, jika $x > y$
- c. $p - x < q - y$, jika $x < y$
- d. $x - p < y - q$, jika $x > y$
- e. $x - p < y - p$, jika $x > y$

23. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{x}{x+3} < \frac{x+1}{2-x} \text{ adalah } \dots$$

- a. $\{x | x = -3 \text{ dan } x = 2\}$
- b. $\{x | x < -3 \text{ dan } x > 2\}$
- c. $\{x | -3 < x < 2\}$
- d. $\{x | x \leq 0 \text{ atau } x > 2\}$
- e. $\{x | 0 \leq x < 2\}$

24. Agar kedua akar persamaan kuadrat $x^2 + (m + 1)x + 2m - 1 = 0$ tidak riil maka nilai m haruslah

- a. $m > 1$
- b. $m < 1$ atau $m > 5$
- c. $m \leq 1$ atau $m \geq 5$
- d. $1 < m < 5$
- e. $1 \leq m \leq 5$

25. Penyelesaian dari $\frac{x^2 - 3x - 18}{(x - 6)^2(x - 2)} < 0$ adalah

- a. $-3 < x < 6$
- b. $2 < x < 6$ atau $x < -3$
- c. $-3 < x < 2$
- d. $x > -3$
- e. $2 < x < 6$

26. Nilai dari $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{1}{8}\right)}$ adalah

- a. $\frac{1}{4}$
- b. $\frac{1}{2}$
- c. 1
- d. 2
- e. 4

27. Nilai dari $\sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{125} = \dots$

- a. $\sqrt{\frac{100}{125}}$ d. $\sqrt[3]{5}$
 b. $\sqrt{2}$ e. $\sqrt[3]{6}$
 c. $\sqrt{3}$

28. Dengan merasionalkan penyebut, bentuk sederhana dari $\frac{1}{\sqrt{u^3} - \sqrt{v^3}}$ adalah

- a. $\frac{\sqrt{u^3} - \sqrt{v^3}}{u^3 - v^3}$ d. $\frac{\sqrt{u^3} - \sqrt{v^3}}{(uv)^3}$
 b. $\frac{\sqrt{u^3} - \sqrt{v^3}}{u^3 + v^3}$ e. $\frac{\sqrt{u^3} - \sqrt{v^3}}{\sqrt{u^3} + \sqrt{v^3}}$
 c. $\frac{\sqrt{u^3} + \sqrt{v^3}}{u^3 - v^3}$

29. Diketahui $\log 2,25 = p$. Nilai $\log 0,15 = \dots$

- a. $\frac{1}{2}p - 1$
 b. $2p - 1$
 c. $p - 1$
 d. $\sqrt{p} - 1$
 e. $\sqrt{p-1}$

30. $\frac{{}^3\log 50 - {}^2\log 5}{{}^3\log 6 + {}^3\log 10 - {}^2\log 12} = \dots$

- a. $\frac{1}{2}$
 b. 2
 c. ${}^2\log 5$
 d. $\log 5$
 e. ${}^2\log 10$

31. Persamaan kuadrat $x^2 + (m-3)x + m = 0$ mempunyai akar-akar a dan b . Jika

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ maka nilai $m = \dots$

- a. -3
 b. -1
 c. 1
 d. 3
 e. 6

32. Manakah di antara pernyataan berikut yang merupakan ciri dari grafik $y = x^2 - 3x + 2$?

- (1) memotong sumbu X di dua tempat
 (2) untuk $x < 1$, grafik terletak di atas sumbu x
 (3) simetris terhadap garis $x = \frac{3}{2}$
 (4) menyinggung garis $y = \frac{1}{4}$

Pernyataan yang benar adalah pernyataan

- a. 1, 2, dan 3
 b. 1 dan 3
 c. 2 dan 4
 d. 4
 e. semua

33. Setiap bulan gaji A berbanding gaji B sama dengan 4 : 3. Setiap bulannya, A menabung Rp60.000,00. Demikian juga B. Jika perbandingan yang dibelanjakan A dengan B sama dengan 3 : 2 maka gaji A sama dengan

- a. Rp360.000,00
 b. Rp240.000,00
 c. Rp200.000,00
 d. Rp180.000,00
 e. Rp150.000,00

34. Jika $\frac{8}{x+1} + \frac{10}{y+1} = 4$ dan $\frac{12}{x+1} - \frac{5}{y+1} = 2$ maka $x + y = \dots$

- a. 9 d. 6
 b. 8 e. 5
 c. 7

35. Penyelesaian pertidaksamaan

$\frac{x-3}{x-6} \leq \frac{x+1}{x-2}$ adalah

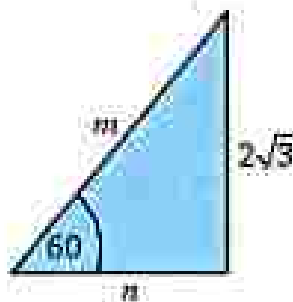
- a. $x > 6$ atau $x < 2$
 b. $x \geq 6$ atau $x \leq 2$
 c. $2 < x < 6$
 d. $2 \leq x < 6$
 e. $x \in R$

36. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan

$$\left| \frac{5}{4x-3} \right| \leq 1 \text{ adalah } \dots$$

- a. $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}$ atau $x \geq 2$
- b. $x \leq -\frac{1}{2}$ atau $\frac{3}{4} < x \leq 2$
- c. $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2, x \neq \frac{3}{4}$
- d. $x \leq -\frac{1}{2}$ atau $x > \frac{3}{4}$
- e. $x \leq -\frac{1}{2}$ atau $x \geq 2$

37. Perhatikan gambar segitiga berikut.



Nilai $m \times n$ sama dengan

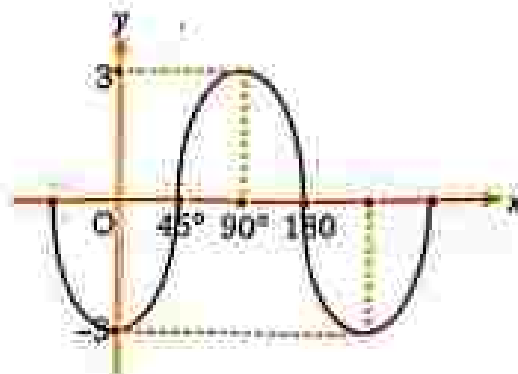
- a. 2
- b. 4
- c. 6
- d. 8
- e. 10

38. Diketahui koordinat titik A adalah

$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right)$. Posisi titik A dalam koordinat kutub adalah

- a. $\left(1, \frac{\pi}{3} \right)$
- b. $\left(1, \frac{\pi}{6} \right)$
- c. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3} \right)$
- d. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} \right)$
- e. $\left(1, \frac{\pi}{4} \right)$

39. Gambar berikut adalah sketsa grafik dengan persamaan $y = a \cos kx^\circ$. Nilai a dan k berturut-turut adalah



- a. -2 dan 3
- b. 2 dan -3
- c. 3 dan -2
- d. -3 dan 2
- e. 2 dan 3

40. Pada segitiga ABC, diketahui sisi $AB = 6$, $BC = \sqrt{76}$, dan $AC = 4$. Luas segitiga ABC sama dengan ... satuan luas.

- a. $6\sqrt{3}$
- b. $24\sqrt{3}$
- c. $3\sqrt{57}$
- d. $4\sqrt{57}$
- e. $6\sqrt{57}$

41. Bentuk $\frac{\tan x + \cot x}{\sec x}$ identik dengan

- a. $\sin x$
- b. $\cos x$
- c. $\sec x$
- d. $\operatorname{cosec} x$
- e. $\tan x$

42. Di bawah ini pernyataan yang bernilai benar, kecuali

- a. $3^2 = 9$ tetapi ${}^3\log 3 \neq 9$
- b. Jika grafik $y = x^2 - 3x + 6$ memotong sumbu y di $(0, 6)$ maka grafik juga memotong sumbu x di $(-3, 0)$
- c. Surabaya adalah ibukota Jawa Timur atau Surabaya terletak di Jawa Tengah
- d. Jika $\frac{1}{4}$ maka $x^2 + 4x + 4 = 0$, mempunyai akar kembar
- e. $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$ jika dan hanya jika $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$

43. Pada tabel kebenaran di bawah ini, pernyataan yang diwakili m adalah

p	q	m
B	B	S
B	S	B
S	B	S
S	S	S

- a. $p \wedge q$ d. $\neg(p \Rightarrow q)$
b. $\neg(p \wedge q)$ e. $\neg(p \Leftrightarrow q)$
c. $\neg(p \vee q)$
44. Pernyataan yang ekuivalen dengan "Jika harga BBM naik maka semua harga barang naik" adalah ...
- a. Jika ada harga barang yang tidak naik maka harga BBM naik
b. Jika semua barang naik maka harga BBM naik
c. Jika ada harga barang yang tidak naik maka harga BBM tidak naik
d. Jika harga BBM tidak naik maka ada harga barang yang tidak naik
e. Jika harga BBM naik maka ada harga barang yang tidak naik
45. Misalnya, Brian berjanji sama Ami, dan janjinya adalah sebagai berikut.
"Jika saya mendapat beasiswa S1 ke Amerika maka saya akan mengajakmu".
Brian ingkar janji apabila ...
- a. Brian tidak mendapat beasiswa S1 ke Amerika dan dia tidak jadi mengajak Ami
b. Brian tidak mendapat beasiswa S1 ke Amerika dan dia jadi mengajak Ami
c. Brian mendapat beasiswa S1 ke Amerika dan dia tidak jadi mengajak Ami
d. Brian mendapat beasiswa S1 ke Amerika dan dia jadi mengajak Ami
e. Brian tidak mendapat beasiswa S1 ke Amerika dan dia mengajak Ami

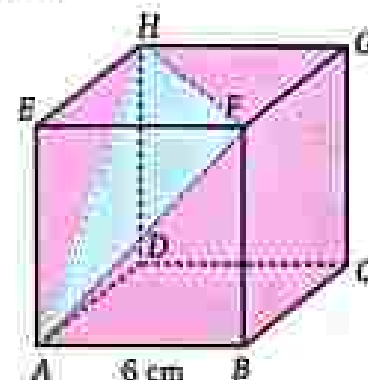
46. Di dalam sebuah kubus yang panjang rusuknya 6 cm, terdapat sebuah bola. Jika permukaan bola menyentuh keenam sisi kubus dan ketebalan dinding kubus diabaikan maka perbandingan volume kubus dengan volume bola adalah

- a. $2 : \pi$
b. $3 : \pi$
c. $4 : \pi$
d. $5 : \pi$
e. $6 : \pi$

47. Limas segilempat beraturan $TABCD$ memiliki panjang rusuk alas 6 cm dan rusuk tegak $3\sqrt{6}$ cm. Jarak titik B dan garis TD sama dengan ... cm.

- a. $2\sqrt{2}$
b. $2\sqrt{3}$
c. $3\sqrt{6}$
d. $4\sqrt{3}$
e. $6\sqrt{3}$

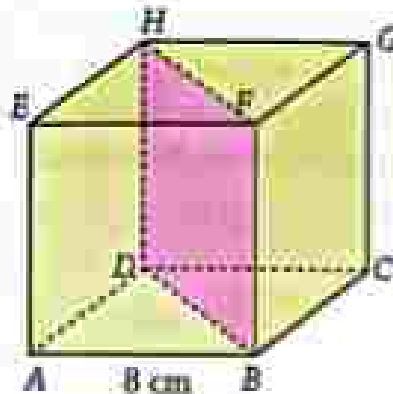
48. Perhatikan gambar kubus $ABCD.EFGH$ berikut.



- Jarak titik C dan bidang AFH sama dengan ... cm.

- a. $2\sqrt{2}$
b. $2\sqrt{3}$
c. $4\sqrt{2}$
d. $4\sqrt{3}$
e. $5\sqrt{2}$

49. Perhatikan gambar kubus $ABCD.EFGH$ berikut.



Panjang proyeksi AH pada bidang $SDHF$ adalah ... cm.

- a. $8\sqrt{3}$
b. $8\sqrt{2}$
c. $4\sqrt{6}$
d. $4\sqrt{3}$
e. $4\sqrt{2}$

50. Diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = 4$, $BC = 3$, dan $BH = 12$. Kosinus sudut yang dibentuk garis HB dan $BG = \dots$

- $\frac{1}{13}\sqrt{15}$
- $\frac{3}{13}\sqrt{15}$
- $\frac{1}{13}\sqrt{17}$
- $\frac{3}{13}\sqrt{17}$
- $\frac{9}{13}\sqrt{17}$

IL 1000

1. Jika $\frac{(30^2)^4 \cdot 49^6}{28^5 \cdot 96^1 \cdot 625^2} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, tentukan nilai $a + b + c + d$.
2. Jika persamaan kuadrat $3px^2 - 6x + 3 = 0$ memiliki akar kembar, tentukan nilai p dan akar yang lainnya.
3. Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang melalui titik-titik $A(0, 4)$, $B(-1, 7)$, dan $C(1, 3)$.
4. Sebuah bak mempunyai dua saluran. Saluran I untuk mengisi bak dan saluran II untuk mengosongkan bak. Saluran II dapat mengosongkan bak dari keadaan penuh selama 5 jam. Saluran I dan saluran II yang dibuka bersamaan dapat mengisi bak sampai penuh dari keadaan kosong selama 3 jam 20 menit. Tentukan waktu yang diperlukan saluran I untuk mengisi penuh bak dari keadaan kosong.
5. Sebuah perusahaan pembuat robot mainan memproduksi dan menjual berbagai robot mainan. Untuk satu model robot tertentu, bagian produksi dan pemasaran memperkirakan bahwa pada harga robot per satuan (a), biaya mingguan M , dan pendapatan P dinyatakan dengan persamaan $M = 15.000.000 - 2.000a$ dan $P = 6.000a - a^2$. Tentukan harga robot per satuan (a) agar perusahaan tersebut memperoleh keuntungan.

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a. $\frac{x-1}{x^2+2x+1} \leq 2$

b. $x - \frac{2x}{x+1} \leq \frac{5}{x+1} - 1$

7. Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - (a+2)x + a = 0$ dan $x_1^2 + x_2^2 = 28$. Tentukan nilai a .

8. Diketahui balok ABCD.EFGH dengan $AB = 4$, $BC = 2$, dan $BF = 3$. Titik P berada pada garis AB dengan $AP : PB = 3 : 1$, titik Q berada pada garis GH dengan $GQ : QH = 3 : 1$. Tentukan jarak garis EQ dengan garis PC .

9. Diketahui premis-premis berikut.

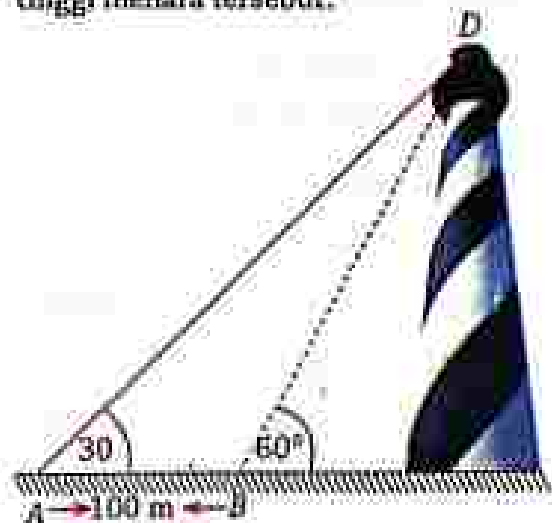
1. $\neg p \rightarrow \neg q$

2. $\neg r \rightarrow \neg p$

3. q

Tentukan kesimpulan yang dapat ditarik dari ketiga premis tersebut.

10. Pada gambar berikut, sudut elevasi terhadap puncak sebuah menara P dilihat dari A adalah 30° dan dari B adalah 60° . Jika A dan B berjarak 100 meter, tentukan tinggi menara tersebut.



Sumber: www.studynationarttag.com

REFERENSI

- Alders, C.J. 1994. *Ilmu Aljabar untuk SLTA Jilid 2*. Pradnya Paramita.
- Bob F., dkk. 2003. *1001 Soal dan Pembahasan Matematika*. Jakarta: Erlangga.
- Frank. Ayres, J.R. 1994. *Matriks*. Jakarta: Erlangga.
- Husein T. 1999. *Seribu Pena Matematika Kelas 1*. , Jakarta: Erlangga.
- Kastolan., dkk. 2003. *Matematika untuk Kelas 1A SMA*. Jakarta: Yudhistira.
- Koesmartono, Rawuh. 1983. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: ITB.
- Mulyadhi Kartanegara. 2006. *Reaktualisasi Tradisi Ilmiah Islam*. , Jakarta: Baitul Ihsan.
- Purdi E.C., dkk. 1995. *Matematika Dasar*. Yogyakarta: Primagama.
- Randall, dkk. 2005. *Prentice Hall Mathematics Course 3*. New Jersey: Pearson Education.
- Sartono W. 2002. *Matematika SMU Kelas 1 Semester 1*. Jakarta: Erlangga.
- Shing Lee. 2006. *New Syllabus Mathematics 1*. Singapore: Publisher PTE Ltd.
- Shing Lee. 2006. *New Syllabus Mathematics 2*. Singapore: Publisher PTE Ltd.
- Spiegel M.R. 1994. *Perubah Kompleks*. Jakarta: Erlangga.
- Spiegel M.R. 1987. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.
- Suryadi, HS., dkk. 1985. *Aljabar Linear*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Wilson S. 2000. *Matematika Kelas 1 Semester Kedua*. Jakarta: Gematama.
- Winarno. 2002. *Bimbingan Pemantapan Matematika IPA*. Bandung: Yrama Widya.
- Yusuf Y., dkk. 1990. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- . 1995. *Detik-Detik EBTANAS*. Klaten: Intan Pariwara.
- . 2003. *Tes Masuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Epsilon Grup.

ANSWER KEY

1 Bukan Bilangan Biasa

I. Pilihan Ganda

1. b 2. c 3. d 4. b 5. c 6. d 7. e 8. b 9. d 10. c 11. b 12. d 13. e 14. c 15. a 16. c 17. e 18. a 19. c 20. a

II. Esai

1. a $\frac{3xy^2x^2}{y^2+2x^2y}$

b. $x+y$

3. a $\frac{1}{3}$

b. $\frac{5}{4}$

2 All About "Kusinat"

I. Pilihan Ganda

1. a 2. c 3. b 4. d 5. a 6. c 7. e 8. b 9. d 10. a 11. c 12. e 13. a 14. b 15. c 16. e 17. a 18. c 19. e 20. c 21. c 22. c

II. Esai

1. a $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{31}$

b. -1 dan $\frac{3}{2}$

3. $y = -x^2 + 4x + 2$

5. $p = \frac{8}{31}\sqrt{31}$

3 Suatu Sistem Persamaan

I. Pilihan Ganda

1. d 2. d 3. b 4. a 5. a 6. c 7. a 8. d 9. a 10. c 11. c 12. d 13. a 14. c 15. e 16. c 17. d 18. e 19. e 20. c

II. Esai

1. 216 cm^3

3. 4

5. 6 dan 10

4 Pertidaksamaan

I. Pilihan Ganda

1. c 2. c 3. c 4. e 5. d 6. c 7. e 8. a 9. a 10. c 11. c 12. d 13. e 14. c 15. e 16. e 17. e 18. e 19. e 20. e

II. Esai

1. a $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$

b. $-3 < x < \frac{1}{2}$ atau $\frac{2}{3} < x < 4$

3. $b \geq 2$

5 Bermain dengan Logika Matematika

I. Pilihan Ganda

1. b 2. d 3. b 4. a 5. d 6. e 7. d 8. b 9. d 10. b 11. e 12. d 13. d 14. b 15. d 16. b 17. d 18. b 19. d 20. b

II. Esai

1. a p b
b. BP p
c. p BP
d. p BP
e. BP p
f. p BP
g. BP p
h. p BP
i. p BP
j. BP p
k. BP p
l. p BP
m. BP p
n. p BP
o. BP p
p. p BP
q. BP p
r. p BP
s. BP p
t. p BP
u. BP p
v. p BP
w. BP p
x. BP p
y. BP p
z. BP p

3. Terpenuhi

5. a $n = 3$ atau $n = -3$

b. $n = 4$

6 Menelusuri Belantara Trigonometri

I. Pilihan Ganda

1. c 2. a 3. e 4. a 5. d 6. c 7. a 8. d 9. a 10. c 11. a 12. d 13. d 14. b 15. d 16. b 17. c 18. d 19. b 20. d

II. Esai

1. a. 1

b. $-\sqrt{3}$

3. $x = 19^\circ, 199^\circ$

5. $20\sqrt{3}$